

F15-T1-A2

Sei $m \geq 3$ eine ungerade ganze Zahl. Zeigen Sie die folgende Kongruenz:

$$1^m + 2^m + 3^m + \dots + (m-3)^m + (m-2)^m + (m-1)^m \equiv 0 \pmod{m}.$$

Lösungsvorschlag. Da m nach Voraussetzung ungerade ist, genügt es, zu zeigen, dass

$$i^m + (m-i)^m \equiv 0 \pmod{m}$$

für alle $1 \leq i < m$. Dies folgt sofort aus

$$(m-i)^m = \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} m^r (-i)^{m-r} \equiv -i^m \pmod{m}.$$