F15-T1-A1

Sei $\mathbb{F}_2$ der endliche Körper mit genau zwei Elementen 0 und 1. Auf dem dreidimensionalen $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $(\mathbb{F}_2)^3$ betrachten wir den Endomorphismus

$$\phi\colon (\mathbb{F}_2)^3 \to (\mathbb{F}_2)^3, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_3, x_2, x_1).$$

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von ϕ. Bestimmen Sie alle Eigenwerte von ϕ in $\mathbb{F}_2$. Bestimmen Sie für jeden Eigenwert von ϕ in $\mathbb{F}_2$ eine Basis des zugehörigen Eigenraumes.

b) Gibt es eine Basis von $(\mathbb{F}_2)^3$, bezüglich derer ϕ eine Jordan'sche Normalform hat? Begründen Sie Ihre Antwort. Wenn ja, bestimmen Sie die Jordan'sche Normalform von ϕ.

Lösungsvorschlag. Zu a). Bezüglich der in der Angabe implizit gewählten Basis hat ϕ die Matrix-Darstellung

$$\operatorname{Mat}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom ist somit gegeben durch

$$\chi(\phi)(X) = \det \begin{pmatrix} -X & 0 & 1 \\ 0 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & -X \end{pmatrix} = (1-X)(X^2-1) = (1-X)^3 \in \mathbb{F}_2[X].$$

Der einzige Eigenwert von ϕ ist also 1 (dies – die Eigenwerte und damit das charakteristische Polynom – hätte man auch direkt aus der Tatsache folgern können, dass $\operatorname{Mat}(\phi)$ offensichtlich vollen Rang hat, was einen Eigenwert 0 ausschließt, womit 1 die einzige verbleibende Möglichkeit ist). Der zugehörige Eigenraum ist

$$\operatorname{ER}_\phi(1) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^3 \ : \ \operatorname{Mat}(\phi) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^3 \ : \ a = c \right\}$$

Wir finden sofort zwei linear unabhängige Vektoren dieser Form, z. B. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Da wir außerdem auch direkt einen Vektor angeben können, welcher *nicht* in $\operatorname{ER}_\phi(1)$ liegt, beispielsweise $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, erhalten wir insgesamt

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \operatorname{ER}_\phi(1) \text{ und } \dim_{\mathbb{F}_2}(\operatorname{ER}_\phi(1)) \leq 2, \text{ also } \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \operatorname{ER}_\phi(1).$$

Zu b). Das charakteristische Polynom $\chi(\phi)(X) \in \mathbb{F}_2[X]$ zerfällt über $\mathbb{F}_2$ vollständig in Linearfaktoren, somit lässt sich eine Basis finden, bezüglich derer $\mathrm{Mat}(\phi)$ Jordan'sche Normalform hat. Die Anzahl der Jordan-Blöcke ist $\dim(\mathrm{ER}_\phi(1)) = 2$, wir erhalten als Jordan-Form demnach

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$