F12-T3-A5

Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung, $G := \mathrm{Gal}(L/K)$ die zugehörige Galoisgruppe, $\alpha \in L$ und $f(X)$ das normierte Minimalpolynom von α über K. Zeigen Sie, dass

$$f(X)^{[L:K(\alpha)]} = \prod_{\sigma \in G} (X - \sigma(\alpha))$$

gilt.

Lösungsvorschlag. Wir nennen $H := \mathrm{Gal}(L/K(\alpha)) \subset G$ und $n := [L : K(\alpha)] = |H|$. Wir wissen, dass für $\sigma, \tau \in G$ gilt

$$\sigma(\alpha) = \tau(\alpha) \quad \iff \quad \tau^{-1} \circ \sigma \in H.$$

Sei nun $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$ mit $r = |G/H|$ ein Repräsentantensystem der Restklassen modulo H in G. Wir setzen

$$\tilde{f}(X) = \prod_{i=1}^{r} (X - \sigma_i(\alpha))$$

gilt. Dann ist nach Konstruktion

$$\tilde{f}(X)^n = \prod_{\sigma \in G} (X - \sigma(\alpha))$$

und es bleibt also nur $\tilde{f} = f$ zu zeigen. Dazu beobachten wir, dass erstens gilt

$$r = |G/H| = |G|/|H| = [L : K]/[L : K(\alpha)] = [K(\alpha) : K] = \deg(f),$$

und zweitens die $\sigma_i(\alpha)$ nach Konstruktion alle verschieden sind und jedes davon Nullstelle von f ist. Somit haben $\tilde{f}$ und f (denselben Grad und) dieselben Nullstellen, also $\tilde{f} = f$ wie gewünscht.