F12-T3-A4

Sei R ein Integritätsring. Zeigen Sie: Ist $R[X]$ ein Hauptidealring, so ist R ein Körper.

Lösungsvorschlag. Betrachte das Ideal (X) in $R[X]$. Wir wollen zeigen, dass (X) ein maximales Ideal ist, denn dann ist $R[X]/(X) \simeq R$ ein Körper. Nun ist X ein irreduzibles Element von $R[X]$ – da R ein Integritätsbereich ist, ist $R[X]$ Integritätsbereich und zudem nach Voraussetzung Hauptidealring, insbesondere also faktoriell, womit X bereits ein Primelement ist. Also ist (X) ein Primideal und damit (da $R[X]$ ein Hauptidealbereich ist) schon maximal.

Mögliche Alternative Sei I ein Ideal mit $(X) \subset I \subsetneq R[X]$. Da R nach Voraussetzung ein Hauptidealbereich ist gilt $I = (f)$ für ein $f \in R[X]$, und damit $(X) \subset (f) \Leftrightarrow f|X \Leftrightarrow f = aX$ für ein $a \in R^\times$ und $(X) = (f)$, womit die Maximalität von (X) gezeigt ist. Hier haben wir verwendet, dass R ein Integritätsbereich ist, genauer: $f|X$, dann folgt $\deg f \leq 1$, da in Integritätsbereichen R gilt $\deg fg = \deg f + \deg g$ für $f, g \in R[X]$. Wir erhalten eine Gleichung der Form $X = c(aX + b)$ für $a, b, c \in \mathbb{R}$ und schließen $b = 0$ (wegen $c \neq 0$ und R Integritätsbereich) und $ca = 1$, also $a, c \in R^\times$, und also $f = aX$.