

### F12-T3-A3

Für welche  $a, b \in \mathbb{Q}$  ist das Polynom  $(X - 1)^2$  ein Teiler von  $f(X) := aX^{30} + bX^{15} + 1$ ?

*Lösungsvorschlag.* Es ist  $f(X)$  genau dann durch  $(X - 1)^2$  teilbar, wenn 1 eine (mindestens) doppelte Nullstelle von  $f$  ist, wenn also gilt  $f(1) = 0 = f'(1)$  (für die Ableitung  $f'$  von  $f$ ). Nun beobachten wir

$$1. \quad 0 = f(1) = a + b + 1 \quad \Rightarrow \quad a = -b - 1,$$

$$2. \quad 0 = f'(1) = 30a + 15b \quad \stackrel{1.}{\Rightarrow} \quad -15b = 30 \quad \Rightarrow \quad b = -2 \quad \stackrel{\text{in 1.}}{\Rightarrow} \quad a = 1.$$

$(X - 1)^2$  ist also genau dann Teiler von  $f(X)$ , wenn  $a = 1$  und  $b = -2$  ist.