

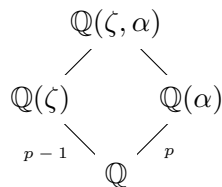
## F12-T3-A2

Sei  $p \neq 2$  eine Primzahl,  $\zeta := \exp(2\pi i/p) \in \mathbb{C}$  und  $\sqrt[p]{p} \in \mathbb{R}_{>0}$ . Weiter sei  $L$  der Zerfällungskörper des Polynomes  $f(X) = X^p - p \in \mathbb{C}$  und  $M$  der Zerfällungskörper des Polynomes  $g(X) = X^{p^2} - 1$  in  $\mathbb{C}$ . Zeigen Sie:

- $L = \mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[p]{p})$ .
- $[L : \mathbb{Q}] = [M : \mathbb{Q}]$ .
- Die Galoisgruppe  $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$  ist nicht abelsch.
- Die Körper  $L$  und  $M$  sind nicht isomorph.

*Lösungsvorschlag.* Zu a). Wir nennen  $\alpha := \sqrt[p]{p}$ . Die Nullstellen von  $f$  sind gerade  $\zeta^i \alpha$ ,  $i = 0, \dots, p-1$ . Nach Definition ist damit  $L = \mathbb{Q}(\alpha, \zeta \alpha, \zeta^2 \alpha, \dots, \zeta^{p-1} \alpha)$ . Offensichtlich ist damit  $L \subset \mathbb{Q}(\zeta, \alpha)$ . Für die umgekehrte Inklusion “ $\supset$ ” ist noch zu zeigen, dass  $\zeta \in L$ . Das ist aber klar, da  $\zeta = \zeta \alpha / \alpha \in L$ .

Zu b). Da  $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \deg(f) = p$  und  $[\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = p-1$  sowie  $\text{ggT}(p, p-1) = 1$  folgt nach der Gradformel  $[\mathbb{Q}(\zeta, \alpha) : \mathbb{Q}] = p(p-1)$ , vgl. folgendes Diagramm:



Weiter ist  $M = \mathbb{Q}(\zeta_{p^2}^i | i = 0, \dots, p^2-1)$  die von den  $p^2$ -ten Einheitswurzeln erzeugte Erweiterung von  $\mathbb{Q}$ , also  $M = \mathbb{Q}(\zeta_{p^2})$  für eine primitive  $p^2$ -te Einheitswurzel  $\zeta_{p^2}$ . Damit ist bekanntlich  $[M : \mathbb{Q}] = \phi(p^2) = p(p-1)$ , für  $\phi$  die Eulersche Phi-Funktion. Also  $[M : \mathbb{Q}] = p(p-1) = [L : \mathbb{Q}]$ .

Zu c). Da  $f$  irreduzibel ist, wirkt  $\text{Gal}(f)$  bekanntlich transitiv auf den Nullstellen von  $f$ . Insbesondere existiert ein  $\sigma \in \text{Gal}(f)$ , so dass  $\sigma(\alpha) = \zeta \alpha$ . Sei weiter  $\text{Gal}(f) \ni \iota : L \rightarrow L$ ,  $z \mapsto \bar{z}$  der komplexe  $\mathbb{Q}$ -Automorphismus von  $L$ , dann gilt  $\iota(\zeta \alpha) = \bar{\zeta} \alpha = \zeta^{p-1} \alpha$  und also

$$\sigma \iota(\alpha) = \sigma(\alpha) = \zeta \alpha \neq \zeta^{p-1} \alpha = \iota \sigma(\alpha),$$

also  $\sigma \iota \neq \iota \sigma$ , womit gezeigt ist, dass  $\text{Gal}(f) = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$  nicht abelsch ist.

Zu d). Es ist bekannt, dass

$$\text{Gal}(M/\mathbb{Q}) = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^2})/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^\times$$

gilt (vgl. Übungen). Somit ist  $\text{Gal}(M/\mathbb{Q})$  insbesondere abelsch und folgt  $M \not\simeq L$ , wie behauptet (da  $M \simeq L$  offensichtlich  $\text{Gal}(M/\mathbb{Q}) \simeq \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$  implizieren würde).