F12-T3-A1

In der Gruppe $G := \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ betrachten wir die Teilmenge

$$M := \left\{ B \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C}) \,\middle|\, B^2 = E_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass alle Matrizen $B \in M$ diagonalisierbar sind.

b) Zeigen Sie, dass die Operation $G \times M \to M,\ (A, B) \mapsto ABA^{-1}$ von G auf M durch Konjugation wohldefiniert ist und die Menge M in genau 5 disjunkte Bahnen zerlegt.

Lösungsvorschlag. Zu a). Bekanntlich (vgl. Übungen) ist eine Matrix B über $\mathbb{C}$ genau dann diagonalisierbar, wenn das Minimalpolynom $\mu_B(X) \in \mathbb{C}[X]$ separabel ist. Nach Definition von M gilt für $P(X) = X^2 - 1$ und jedes $B \in M$ ja gerade $P(B) = 0$. Nach Definition des Minimalpolynomes muss damit aber gelten $\mu_B(X) | P(X)$, und da $P(X) = (X-1)(X+1)$ offensichtlich separabel ist, folgt dasselbe für jeden Teiler insbesondere für $\mu_B(X)$.
Zu b). Nach a) wissen wir, dass sich jede Matrix $B \in M$ durch Basiswechel in Diagonalform bringen lässt, und dass die Eigenwerte als Nullstellen des Minimalpolynomes $\mu_B(X)$, welches wiederum Teiler von $X^2 - 1$ ist, aus $\{\pm 1\}$ stammen. Kurz gesagt, es existiert ein $A \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$, so dass gilt

$$ABA^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$$

Für $a_i \in \{\pm 1\}$. Auch ist bekannt, dass die Reihenfolge der Diagonaleinträge durch Basiswechsel beliebig vertauscht werden können, die Eigenwerte selbst wiederum aber invariant unter Basiswechsel sind. Die möglichen verschiedenen Diagonalformen (also bis auf Reihenfolge der Einträge) sind also

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

und, wenn wir die Menge der Bahnen unter der Wirkung von G auf M mit $B_{G,M}$ bezeichnen, erhalten wir also eine Bijektion

$$D \xrightarrow{\sim} B_{G,M}, \quad D \ni d \mapsto G \cdot d.$$