F12-T2-A3

Bestimmen Sie alle Teiler von 6 im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}] = \{a + \sqrt{-6}b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Lösungsvorschlag. Wir definieren die Normabbildung

$$N \colon \mathbb{Z}[\sqrt{-6}] \to \mathbb{N}, \quad z = a + b\sqrt{-6} \mapsto z\overline{z} = a^1 + 6b^2.$$

Diese ist multiplikativ, ist also $6 = ab$, so folgt $36 = N(6) = N(ab) = N(a)N(b)$. Wir wollen also alle Teiler von 36 identifizieren, die von der Form $a^2 + 6b^2$ für $a, b \in \mathbb{Z}$ sind. Diese sind $4 = N(2)$, $9 = N(3)$, $6 = N(\sqrt{-6})$ und $36 = N(6)$. Alle zugehörigen Elemente sind auch Teiler von 6, womit die komplette Liste der Teiler zu $\{1, 2, 3, \sqrt{-6}, 6\}$ bestimmt ist.