F12-T2-A1

Welche der folgenden Aussagen sind richtig bzw. falsch? Geben Sie jeweils eine **kurze** Begründung an:

a) Die Gruppen $Z_6 \times Z_{10}$ und $Z_2 \times Z_{30}$ sind isomorph (Z_n bezeichne dabei die zyklische Gruppe der Ordnung n).

b) Die alternierende Gruppe A_4 ist eine einfache Gruppe.

c) In der symmetrischen Gruppe S_5 sind alle Elemente der Ordnung 2 konjugiert.

d) In $\mathbb{Z}[X]$ ist (X) ein Primideal.

Lösungsvorschlag. Zu a). Nach Definition ist $Z_i \simeq \mathbb{Z}_i$. Wegen $\mathrm{ggT}(2,3) = 1 = \mathrm{ggT}(3,10)$ liefert der chinesische Restsatz Isomorphismen

$$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{10} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{10} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{30}.$$

Die Aussage ist also wahr. Zu b). Falsch, die Kleinsche Vierergruppe

$$V_4 := \{\mathrm{Id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$$

ist ein Normalteiler in A_4. Für den Nachweis genügt es, zu zeigen, dass V_4 ein Normalteiler in S_4 ist. Da S_4 bekanntlich von Transpositionen erzeugt wird, genügt es weiter, zu zeigen, dass für jede Transposition $\sigma \in S_4$ gilt $\sigma V_4 \sigma^{-1} = V_4$. Da gilt

$$\sigma(a,b)(c,d)\sigma = (\sigma(a), \sigma(b))(\sigma(c), \sigma(d))$$

ist das aber klar nach Definition von V_4.
Zu c). Falsch, z.B. gilt bekanntlich für eine Transposition $(a,b) \in S_5$ und ein beliebiges $\sigma \in S_5$, dass $\sigma(a,b)\sigma^{-1} = (\sigma(a), \sigma(b))$, das heißt, die Konjugation einer Transposition ist stets wieder eine Transposition. Insbesondere können z.B. $(1,2)$ und $(1,2)(3,4)$ nicht konjugiert zueinander sein, aber beide Elemente haben Ordnung 2.
Zu d). Direkt nach Definition ist in einem Ring R ein Ideal $I \subset R$ genau dann ein Primideal, wenn R/I ein Integritätsbereich ist. Nun ist $\mathbb{Z}[X]/(X) \simeq \mathbb{Z}$ ein Integritätsbereich, damit ist (X) ein Primidieal und die Aussage wahr.