F12-T1-A5

Sei K der Zerfällungskörper des Polynoms $X^5 + 5 \in \mathbb{Q}[X]$. Seien $\alpha = \sqrt[5]{5} \in \mathbb{R}$, $\zeta = e^{\frac{2\pi}{5} \cdot i}$. Zeigen Sie:

a) Der Körper K wir von α und ζ über $\mathbb{Q}$ erzeugt.

b) Die Erweiterung $\mathbb{Q} \subseteq K$ ist Galoissch, und $[K : \mathbb{Q}] = 20$.

c) Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$ ist eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 20.

d) Die Galoisgruppe hat einen Normalteiler der Ordnung 5.

e) Die 2-Sylow-Untergruppen der Galoisgruppe sind zyklisch mit Ordnung 4.

Lösungsvorschlag. Zu a). Nach Definition ist $K = \mathbb{Q}(\alpha, \zeta\alpha, \zeta^2\alpha, \zeta^3\alpha, \zeta^4\alpha)$. Die Inklusion $K \subset \mathbb{Q}(\zeta, \alpha)$ ist damit klar. Die umgekehrte Inklusion folgt wegen $\zeta = \frac{\zeta\alpha}{\alpha} \in K$.
Zu b). K ist Galoisch als Zerfällungskörper des separablen Polynomes $X^5 - 5$. Da $X^5 - 5$ irreduzibel ist nach Lemma von Gauß und dem Eisensteinkriterium für die Primzahl 5, ist $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \deg(X^5 - 5) = 5$. Nach der Gradformel gilt $5 = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] | [K : \mathbb{Q}]$ und $4 = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] | [K : \mathbb{Q}]$, also wegen $\mathrm{kgV}(4, 5) = 20$ bereits $20 | [K : \mathbb{Q}]$. Andererseits haben wir

$$[K : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha, \zeta) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\alpha)(\zeta) : \mathbb{Q}(\alpha)] \cdot [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \leq [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] \cdot [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 20$$

und somit insgesamt $[K : \mathbb{Q}] = 20$.
Zu c). Es ist $|\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})| = [K : \mathbb{Q}] = 20$. Da die Zwischenerweiterung $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\alpha)$ nicht normal ist, also die Untergruppe $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}(\alpha)) \subset \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$ kein Normalteiler ist (nach dem Hauptsatz der Galoistheorie), muss $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$ also nicht-abelsch sein.
Zu d). Wir setzen ab jetzt $G := \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$. Nach den Sylowsätzen gilt für die Anzahl s_5 der 5-Sylowgruppen von G: $s_5 | 4$ und $s_5 \equiv 1 \mod 5$, also $s_5 = 1$. Damit existiert nur eine einzige 5-Sylowgruppe in G, die damit, wiederum nach den Sylowsätzen, ein Normalteiler in G ist.
Zu e). Die 2-Sylowgrupen von G haben die Ordnung 4. Nach den Sylowsätzen sind alle 2-Sylowgruppen zueinander konjugiert, insbesondere also isomorph zueinander. Es genügt also, eine zyklische Untergruppe von G der Ordnung 4 zu finden. Wir wollen zeigen, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}(\alpha))$ eine solche Untergruppe ist. Das Polynom $\phi_5(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{Q}(\alpha)[X]$ hat in jedem Fall ζ als Nullstelle. Da wie oben gezeigt $[K : \mathbb{Q}(\alpha)] = 4$ gilt, muss $\phi_5 \in \mathbb{Q}(\alpha)[X]$ bereits irreduzibel sein. Somit sind die Galoissch Konjugierten von ζ über $\mathbb{Q}(\alpha)$ die weiteren Nullstellen von ϕ_5 und wir erhalten einen Gruppenisomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_5^\times &\to \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q}(\alpha)) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}(\alpha)}(K) \\ i &\mapsto \begin{pmatrix} \varphi_i \colon \mathbb{Q}(\alpha, \zeta) \to \mathbb{Q}(\alpha, \zeta) \\ \alpha \mapsto \alpha, \quad \zeta \mapsto \zeta^i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da $\mathbb{Z}_5^\times$ von Ordnung 4 und zyklisch ist, ist die Aufgabe damit abgeschlossen.