F12-T1-A3

Die Teilmenge $R = \{q \in \mathbb{Q} | \exists\, a, b \in \mathbb{Z} \colon q = \frac{a}{b} \text{ und } 2 \nmid b \text{ und } 3 \nmid b\}$ des Körpers der rationalen Zahlen ist ein Unterring, der die ganzen Zahlen enthält.

a) Bestimmen Sie die Einheiten-Gruppe $R^\times$.

b) Zeigen Sie, dass 2 und 3 Primelemente von R sind.

c) Zeigen Sie, dass jedes Primelement entweder zu 2 oder zu 3 assoziiert ist. /Begriff *assoziiert*: Zwei Elemente $x, y \in R$ sind zueinander assoziiert, wenn es eine Einheit u gibt mit $x = u \cdot y$.)

Lösungsvorschlag. Zu a). Sei $a/b \in R$ vollständig gekürzt. Dann ist $a/b \in R^\times$ genau dann, wenn $b/a \in R$ liegt, also $2, 3$ nicht a teilen. Also

$$R^\times = \{q \in \mathbb{Q} | \exists a, b \in \mathbb{Z} \colon q = \frac{a}{b} \text{ und } 2, 3 \nmid a, b\}$$

Zu b). Nach Teil a) ist ein (vollständig gekürztes) $a/b \in R$ nur dann (und genau dann) eine nicht-Einheit, wenn gilt $2|a$ oder $3|a$ (beides zusammen ist natürlich zugelassen). Da nach Definition von R weder 2 noch 3 den Nenner (gekürzten) Nenner b teilen, ist nach a) also $1/b \in R^\times$, das heißt, wir haben gezeigt, dass jedes Element in R assoziiert zu einem Element $a \in \mathbb{Z} \subset R$ ist, wobei, sofern a/b keine Einheit war, gelten muss $2|a$ oder $3|a$ (oder beides). Da Teilbarkeit nur bis auf Assoziiertheit definiert ist, bedeutet dies für (vollständig gekürzte) $a_1/b_1, a_2/b_2 \in R$, dass $a_1/b_1 | a_2/b_2$ genau dann gilt, wenn $a_1 | a_2$. Damit ist klar, dass 2 und 3 Primelemente sind, da 2 und 3 bekanntermaßen Primelemente in $\mathbb{Z}$ sind.
Zu c). Nach den Überlegungen aus b) ist ein vollständig gekürztes $a/b \in R$ genau dann prim, wenn a/b keine Einheit ist, also $2|a$ oder $3|a$ gilt, und $a \in \mathbb{Z}$ prim ist, insgesamt also $a \in \{2, 3\}$. Da wie ebenfalls bereits beobachtet $1/b \in R^\times$ ist, ist die Aussage damit vollständig begründet.