F12-T1-A2

Zeigen Sie, dass in der symmetrischen Gruppe S_5 alle Untergruppen der Ordnung 8 zur Diedergruppe D_4 (der Symmetriegruppe eines Quadrates) isomorph sind.

Lösungsvorschlag. Da $|S_5| = 5! = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ hat eine 2-Sylowgruppe von S_5 gerade die Ordnung $2^3 = 8$ (und jede Untergruppe dieser Ordnung ist nach Definition eine 2-Sylowgruppe). Die Sylowsätze sagen uns, dass je zwei dieser 2-Sylowgruppen konjugiert zueinander sind, insbesondere also isomorph zueinander. Es genügt damit, von einer einzigen Untergruppe U von S_5 zu zeigen, dass sie isomorph zur D_4 ist. Wir betrachten $U := \langle (1,2,3,4), (1,3) \rangle$. Offensichtlich ist dann $|U| = 8$ (z. B. $(1,3) \notin \langle (1,2,3,4) \rangle$), und U ist nach Definition isomorph zu D_4: Es gilt $\operatorname{ord}((1,2,3,4)) = 4$, $\operatorname{ord}((1,3)) = 2$ und

$$(1,3)(1,2,3,4)(1,3) = (1,4,3,2) = (1,2,3,4)^3.$$