F12-T1-A1

Das Zentrum einer Gruppe G ist die Menge $Z(G) = \{a \in G | \forall b \in G\colon a \cdot b = b \cdot a\}$. Bestimmen Sie das Zentrum der orthogonalen Gruppe $\mathscr{O}(2,\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) | A^t A = E_2\}$ über den reellen Zahlen.

Lösungsvorschlag. Wir untersuchen, welche Bedingungen an eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{O}(2,\mathbb{R})$ wir durch die Relation $AB = BA$ für bestimmte explizite Beispiele von $B \in \mathscr{O}(2,\mathbb{R})$ ableiten können. Z.B. ist $B_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{O}(2,\mathbb{R})$ wegen $B_1^2 = B_1^t B_1 = E_2$. Weiter ist

$$\begin{aligned} B_1 A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \\ AB_1 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Bedingung $B_1 A = AB_1$ liefert also $c = b$, $a = d$, d.h. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = E_2$$

ist aber auch $B_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{O}(2,\mathbb{R})$, und $B_2 A = AB_2$ liefert mit

$$\begin{aligned} B_2 A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ -a & -b \end{pmatrix} \\ AB_2 &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -a & b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Bedingung $b = -b$, also $b = 0$. Somit muss gelten $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ für ein $a \in \mathbb{R}$. Dann ist aber $A^t = A$ und, da A orthogonal ist, muss gelten

$$E_2 = A^t A = A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix},$$

also $a \in \{\pm 1\}$. Somit haben wir $Z(\mathscr{O}(2,\mathbb{R})) \subset \{\pm E_2\}$ gezeigt – die umgekehrte Inklusion ist offensichtlich, insgesamt also $Z(\mathscr{O}(2,\mathbb{R})) = \{\pm E_2\}$.