F11-T1-A2

Sei G eine endliche Gruppe. Die Ordnung von $g \in G$ bezeichnen wir mit $\operatorname{ord}(g)$. Es seien $a, b, c \in G$ mit folgenden Eigenschaften: Die Gruppe G wird von $\{a, b, c\}$ erzeugt, das Element a erzeugt das Zentrum von G, und es gilt

$$bcb^{-1}c^{-1} = a.$$

a) Berechnen Sie $b^n cb^{-n}c^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Zeigen Sie, dass $\operatorname{ord}(a)|\operatorname{ord}(b)$.

c) Zeigen Sie, dass $b^{\operatorname{ord}(a)}$ im Zentrum von G liegt.

d) Folgern Sie hieraus $\operatorname{ord}(b)|(\operatorname{ord}(a))^2$.

(Hinweis: Das Zentrum einer Gruppe G ist die Menge aller $x \in G$ mit $xg = gx$ für alle $g \in G$.)

Lösungsvorschlag. Nach Angabe gilt $G = \langle a, b, c\rangle$, $Z(G) = \langle a\rangle$ und $bcb^{-1}c^{-1} = a$.

Zu a) Wir beobachten zuerst, dass der Fall $n = 1$ gerade die in der Angabe gegebene Relation $bcb^{-1}c^{-1} = a$ ist. Diese können wir zudem umformen zu

$$bc = acb.$$

Wir setzen dies ein und erhalten

$$b^n cb^{-n}c^{-1} = b^{n-1}bcb^{-n}c^{-1} = b^{n-1}acbb^{-n}c^{-1} = b^{n-1}cb^{-(n-1)}c^{-1}a,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass a im Zentrum von G liegt. Damit können wir durch Induktion über n folgern, dass $b^n cb^{-n}c^{-1} = a^n$ gilt.

Zu b) Wir wollen zeigen, dass $a^{\operatorname{ord}(b)} = 1$ gilt, wobei wir das neutrale Element der Gruppe G mit 1 bezeichnet haben. Mit a) berechnen wir

$$a^{\operatorname{ord}(b)} = b^{\operatorname{ord}(b)}cb^{-\operatorname{ord}(b)}c^{-1} = cc^{-1} = 1.$$

Zu c) Wegen $G = \langle a, b, c\rangle$ genügt es, zu zeigen, dass $b^{\operatorname{ord}(a)}$ mit c kommutiert. Nach a) haben wir

$$b^{\operatorname{ord}(a)}cb^{-\operatorname{ord}(a)}c^{-1} = a^{\operatorname{ord}(a)} = 1,$$

also $b^{\operatorname{ord}(a)}c = cb^{\operatorname{ord}(a)}$ wie gewünscht.

Zu d) Wir wollen zeigen $b^{\operatorname{ord}(a)^2} = 1$. Nach c) ist $b^{\operatorname{ord}(a)} \in Z(G) = \langle a\rangle$, also insbesondere (nach Lagrange) $\operatorname{ord}(b^{\operatorname{ord}(a)}) \mid \operatorname{ord}(a)$ und

$$b^{\operatorname{ord}(a)^2} = (b^{ord(a)})^{\operatorname{ord}(a)} = 1$$

(kleiner Satz von Fermat).