ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. SAINTE-LAGUË

La rtepré sentation proportionnelle et la méthode des moindres carrés

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 27 (1910), p. 529-542.

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1910_3_27__529_0>

LA REPRÉSENTATION PROPORTIONNELLE

ET

LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS,

PAR M. A. SAINTE LAGUË,

Professeur au Lycée de Douai.

1. Si l'on veut partager un entier N proportionnellement à divers nombres A, B, C, ..., on obtient comme solutions des nombres en général fractionnaires

$$a = \frac{\mathrm{A\,N}}{\mathrm{A+B+C+\ldots}} = \frac{\mathrm{A\,N}}{\mathrm{S}}, \qquad b = \frac{\mathrm{B\,N}}{\mathrm{S}}, \qquad c = \frac{\mathrm{C\,N}}{\mathrm{S}}, \qquad \ldots.$$

Si les résultats doivent être entiers, le problème est habituellement impossible et l'on est obligé de se contenter de solutions approximatives. C'est, comme on le sait, un des problèmes qu'on se pose actuellement en politique, sous le nom de *représentation proportionnelle;* aussi nous arrivera-t-il souvent d'employer les mots d'*électeurs*, *élus*, ...; mais ce qui suit s'appliquera néanmoins à tous les problèmes analogues où il faut répartir des objets qu'on ne peut pas diviser.

Nous adopterons les notations suivantes : A, B, C, ... seront comme ci-dessus les n nombres proportionnellement auxquels devrait être faite la répartition des N entiers, ou si l'on veut ce seront les nombres de suffrages obtenus par les listes en présence; S sera la somme

$$\mathrm{A+B+C+\ldots}.$$

Les parts exactes qu'on devrait donner seront désignées par a, b, c, ..., et celles qu'on donnera en réalité par les entiers α, β, γ, ... (qui sont précisément les inconnues du problème). Posons encore $Q = \frac{S}{N}$; ce nombre Q s'appelle parfois le *quotient électoral*. Enfin nous désignerons par α', β', γ', ... les quotients à une unité près par défaut des divisions de A, B, C, ... par Q :

$$A = \alpha' Q + r_A, \qquad B = \beta' Q + r_B, \qquad C = \gamma' Q + r_C,$$

les restes r étant tous inférieurs à Q.

2. Ces préliminaires étant terminés, la méthode qui se présente le plus naturellement à l'esprit est celle qui consiste à étudier les erreurs commises dans la répartition. Par exemple, chaque électeur a droit à une *fraction de député* donnée par $\frac{N}{S} = \frac{1}{Q}$ et reçoit en réalité, s'il appartient à la liste A, $\frac{\alpha}{A}$ d'où une erreur commise : $\frac{\alpha}{A} - \frac{N}{S}$. On a ainsi pour les divers électeurs des erreurs $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_S$. On a intérêt à ce qu'elles soient le plus petites possible. C'est ici que les diverses méthodes divergent. Parfois on considère uniquement les erreurs positives (celles qui correspondent aux électeurs les mieux représentés) et leur valeur maxima : e qu'on cherche à réduire le plus possible. C'est, comme nous le verrons, la méthode connue sous le nom de méthode d'Hondt. On prend parfois les erreurs négatives et la plus grande en valeur absolue : $-e'$ qu'on rend la plus petite possible; c'est la méthode des *plus fortes fractions*. On peut encore chercher à réduire le plus possible l'écart entre e et e'; c'est la méthode de M. Equer [1].

Bien d'autres méthodes pourraient encore être proposées; mais il nous a semblé légitime d'appliquer ici la méthode des moindres carrés de Gauss, qui, universellement employée en Physique, consiste, comme on le sait, à prendre pour évaluer la précision d'une série de mesures la somme des carrés des erreurs commises, somme qui doit être aussi petite que possible. Pour indiquer sur un exemple la supériorité de cette méthode sur celles qui précèdent, considérons les deux séries

[1] Pour ce qui concerne ces trois méthodes, nous engageons le lecteur à consulter le supplément au numéro du 25 juin 1910 de la *Grande Revue*, brochure de M. Equer, à laquelle nous avons fait quelques emprunts.

de 1000 mesures qui donnent comme erreurs : la première, 500 erreurs égales à $+1$ et 500 à -1 ; la seconde, toutes les erreurs nulles, sauf une égale à $+2$ et une à -2. Sauf la méthode des moindres carrés qui, seule, tient compte de toutes les mesures, les autres méthodes ci-dessus considèrent la seconde série comme moins bonne que la première (1).

3. Nous allons examiner rapidement ces diverses méthodes, en commençant par celle des moindres carrés, qui nous paraît la plus légitime.

L'erreur commise est, comme nous l'avons vu pour chaque électeur du groupe A, $\frac{\alpha}{A} - \frac{N}{S}$. La somme des carrés des erreurs pour les A électeurs de ce groupe est $A\left(\frac{\alpha}{A} - \frac{N}{S}\right)^2$, et par suite pour les S électeurs cette somme est

$$\begin{aligned}\sigma &= \Sigma A\left(\frac{\alpha}{A} - \frac{N}{S}\right)^2 = \Sigma A \frac{(\alpha S - AN)^2}{A^2 S^2}\\ &= \Sigma \frac{\alpha^2}{A} - 2\Sigma\frac{\alpha N}{S} + \Sigma\frac{AN^2}{S^2} = \frac{\alpha^2}{A} - 2\frac{N}{S}\Sigma\alpha + \frac{N^2}{S^2}\Sigma A;\end{aligned}$$

mais $\Sigma\alpha$ est égal à N quel que soit le mode de répartition adopté, et $\Sigma A = S$; d'où

$$\sigma = \Sigma\frac{\alpha^2}{A} - 2\frac{N^2}{S} + \frac{N^2}{S} = \Sigma\frac{\alpha^2}{A} - \frac{N^2}{S}.$$

La quantité à rendre minimum est donc $\Sigma\frac{\alpha^2}{A}$. La solution théorique de ce problème semble impossible à donner, comme cela a lieu souvent dans les problèmes portant sur les nombres entiers (2). Conten-

(1) Le seul reproche fait par quelques calculateurs à la méthode de Gauss est que les erreurs extrêmes prennent trop d'importance, alors que, dans la pratique, on néglige une expérience qui conduit à de trop grands écarts; il y a en effet le plus souvent dans ce cas une erreur matérielle provenant d'une inattention, d'une faute de calcul, etc. ; mais précisément, ici, cet argument n'a aucune valeur, car nous n'avons pas le droit de négliger une catégorie d'électeurs sous quelque prétexte que ce soit.

(2) On a une représentation géométrique dans l'espace à n dimensions en posant

$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{A}}, \qquad y = \frac{\beta}{\sqrt{B}}, \qquad z = \frac{\gamma}{\sqrt{C}}, \qquad \ldots.$$

La relation $\alpha + \beta + \gamma + \ldots = N$ montre que le point de coordonnées $x, y, z, \ldots$ est tons-nous d'en donner une solution pratique. L'identité

$$\alpha^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2\alpha - 3) + (2\alpha - 1)$$

montre que la somme à rendre minimum est la somme des α premiers nombres de la ligne 1, des β premiers de la ligne 2, etc., du tableau suivant : α, β, γ, étant choisis de façon convenable :

Ligne n° 1.........	$\frac{1}{A}, \frac{3}{A}, \frac{5}{A}, \ldots, \frac{2\alpha-3}{A}, \frac{2\alpha-1}{A}, \frac{2\alpha+1}{A}, \frac{2\alpha+3}{A}, \ldots.$
Ligne n° 2.........	$\frac{1}{B}, \frac{3}{B}, \frac{5}{B}, \ldots, \frac{2\beta-3}{B}, \frac{2\beta-1}{B}, \frac{2\beta+1}{B}, \ldots.$
Ligne n° 3.........	$\frac{1}{C}, \frac{3}{C}, \ldots, \frac{2\gamma-1}{C}, \ldots.$
....	....

On aura donc la somme la plus petite possible en prenant précisément les N plus petits nombres, ce qui est aisé, car sur chaque ligne horizontale les nombres vont en croissant.

On a le même résultat si l'on remplace tous ces nombres par leurs inverses et si l'on prend les N plus grands, d'où la règle définitive que nous avions en vue :

Règle des moindres carrés appliquée a la représentation proportionnelle. — *On divise les nombres* A, B, C, ... *par les impairs consécutifs*, 1, 3, 5, 7, ..., *puis on prend dans les diverses listes de quotients ainsi formés tous les plus grands nombres, jusqu'à concurrence de* N. *Le*

---

assujetti à décrire l'espace à $n-1$ dimensions :

$$x\sqrt{A} + y\sqrt{B} + z\sqrt{C} + \ldots = N.$$

Les seuls points de cet espace à considérer sont ceux dont les coordonnées sont des multiples entiers de $\frac{1}{\sqrt{A}}, \frac{1}{\sqrt{B}}, \frac{1}{\sqrt{C}}, \ldots.$ Il faut ensuite prendre parmi ces points celui qui est le plus voisin de l'origine. Si l'on se borne au cas de l'espace à trois dimensions ($n = 3$), le lecteur verra aisément que les points considérés forment dans un plan les sommets d'un réseau de triangles et qu'il faut prendre celui de ces points qui est le plus voisin du pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur ce plan. Des cas de figures convenables montrent que ce n'est pas toujours un des sommets du triangle à l'intérieur duquel tombe le pied de cette perpendiculaire qui répond à la question, c'est-à-dire que la valeur de α n'est pas toujours l'entier α' immédiatement inférieur à a, ou l'entier $\alpha' + 1$ immédiatement supérieur.

groupe A *reçoit ensuite autant d'entiers qu'il y a eu de quotients parmi ces* N, *pris parmi ceux qu'il avait fournis.*

Appliquons à un cas très simple cette règle : Soient $A = 31500$; $B = 21000$; $C = 12000$; $D = 6000$; $E = 2400$ les suffrages réunis par chacun des cinq partis en présence; le nombre des sièges à distribuer étant de 10. Le tableau des quotients par 1, 3, 5, 7, ... devient ici :

Groupe A...........	31500	10500	6300	4500	3500	...
Groupe B...........	21000	7000	4200	3000	....	
Groupe C............	12000	4000	2400	....		
Groupe D...........	6000	2000	....			
Groupe E...........	2000	....				

Les dix plus forts quotients sont soulignés, et l'on voit ainsi que A aura 4 sièges; B 3 sièges; C 2 sièges; D un seul, et E aucun.

On abrège les calculs en divisant A par le quotient électoral $Q = \frac{S}{N}$; si le quotient par défaut, déjà désigné par α', est plus approché que le quotient par excès $\alpha' + 1$, ou encore si le reste r_A est inférieur à $\frac{Q}{2}$, on peut être certain que le groupe A a droit au moins à $\alpha' - 1$ sièges; dans le cas contraire, il a droit au moins à α' sièges (¹).

Ces sièges étant déjà répartis, il suffira de commencer le tableau

(¹) Pour justifier ceci, remarquons d'abord que le nombre des sièges distribués est inférieur à N, car α', β', ... sont au plus égaux à a, b, c, ... Si l'on désigne par α'', β'', γ'', ... ces nombres de sièges (α'' étant égal, comme on l'a vu, à α' ou $\alpha' - 1$ suivant le cas), on verra que chacun des nombres

$$\frac{A}{2\alpha'' - 1}, \quad \frac{B}{2\beta'' - 1}, \quad \frac{C}{2\gamma'' - 1}$$

est supérieur à $\frac{Q}{2}$, tandis que chacun des nombres $\frac{A}{2\alpha'' + 1}$, $\frac{B}{2\beta'' + 1}$, $\frac{C}{2\gamma'' + 1}$, qui les suivent dans la liste des quotients à classer, est inférieur à ce même nombre. Pour α'' ces deux conditions reviennent en effet à

$$2\alpha'' - 1 < \frac{2A}{Q} < 2\alpha'' + 1 \qquad \text{ou} \qquad \alpha'' - \frac{1}{2} < \frac{A}{Q} < \alpha'' + \frac{1}{2},$$

ce qui est bien la définition de α''.

des quotients aux nombres

$$\frac{A}{2\alpha''+1}, \quad \frac{A}{2\alpha''+3}, \quad \ldots, \quad \frac{B}{2\beta''+1}, \quad \ldots,$$

α'', β'', ... étant le nombre des sièges déjà donnés. S'il y a n listes en présence, on verra que la valeur la plus probable du nombre des sièges restant à distribuer est $\frac{3n}{4}$, inférieur au nombre des listes : ceci peut être avantageux si le nombre des sièges est assez grand; pour 4 partis et 12 sièges, il y aura probablement 9 sièges distribués immédiatement.

4. Examinons sommairement les autres méthodes que nous avions indiquées : la première se borne à considérer les erreurs positives. Si l'erreur de répartition commise pour un électeur de A est positive, cela veut dire que cette liste a au moins $\alpha'+1$ sièges ($\alpha'+1$ est, comme on sait, l'entier immédiatement supérieur à a); suivant le nombre de sièges $\alpha'+1$, $\alpha'+2$, ... accordés à la liste A, l'erreur commise est

$$\frac{\alpha'+1}{A}-\frac{N}{S}, \quad \frac{\alpha'+2}{A}-\frac{N}{S}, \quad \ldots.$$

On peut avoir des nombres analogues pour d'autres listes; on doit prendre une répartition telle que le plus grand de ces nombres soit le plus petit possible; on distribuera donc les p sièges restants aux p plus petits nombres, ou, ce qui revient au même, aux p plus grands des nombres

$$\frac{A}{\alpha'+1}, \quad \frac{A}{\alpha'+2}, \quad \ldots, \quad \frac{B}{\beta'+1}, \quad \ldots.$$

Si l'on remarque que les nombres

$$\frac{A}{1}, \quad \frac{A}{2}, \quad \frac{A}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{A}{\alpha'}, \quad \frac{B}{1}, \quad \frac{B}{3}, \quad \ldots, \quad \frac{}{\beta'}, \quad \frac{C}{1}, \quad \ldots, \quad \frac{C}{\gamma}, \quad \ldots,$$

tous plus grands que les précédents, peuvent être considérés comme correspondant aux sièges déjà donnés, on trouve précisément la règle d'Hondt, dont l'énoncé bien connu se déduit de celui de la règle *des moindres carrés* en prenant comme diviseurs les entiers consécutifs 1, 2, 3, 4, ..., au lieu des impairs 1, 3, 5, 7, ... [1].

Si l'on raisonne de façon analogue sur les erreurs négatives en se bornant (bien que ce ne soit pas indispensable) au cas où toutes les listes considérées ont au moins α', β', γ', ... sièges, les erreurs négatives seront données par celles de ces listes qui n'auront pas d'autres sièges, et l'on est amené à prendre pour les sièges non distribués les plus petits des nombres

$$\frac{\alpha'}{A} - \frac{N}{S}, \quad \frac{\beta'}{B} - \frac{N}{S}, \quad \ldots.$$

Mais, d'après la définition de α',

$$\frac{\alpha'}{A} - \frac{N}{S} = \frac{1}{Q} - \frac{r_A}{AQ} - \frac{N}{S} = \frac{-r_A}{AQ}.$$

On prendra donc les plus petits nombres $\frac{-r_A}{AQ}$ ou, ce qui revient au même, les plus grands nombres $\frac{r_A}{A}$ pour les sièges supplémentaires. C'est la méthode des *plus fortes fractions*, qu'il ne faut pas confondre avec celle des *plus grands restes*, qui, elle, accorde les sièges supplémentaires aux plus grands restes r_A, r_B, ...

Enfin nous n'exposerons pas la méthode de M. Equer, renvoyant le lecteur à la brochure déjà citée, où l'auteur indique seulement comment on peut dresser pratiquement la liste des erreurs commises dans les diverses hypothèses et abréger un peu les tâtonnements.

5. Les méthodes qui précèdent sont toutes basées sur la considération des erreurs commises pour chaque électeur dans la répartition. Bien que cela semble beaucoup moins légitime, on peut chercher ce qui se passe pour les erreurs commises sur chaque *élu;* un député a droit en effet à représenter $\frac{S}{N} = Q$ électeurs ; or s'il appartient à la liste A il en représente $\frac{A}{\alpha}$, d'où une erreur commise $\frac{A}{\alpha} - \frac{S}{N}$. Appliquons la

---

(1) Ce raisonnement et celui qui suit sont empruntés en partie à la brochure déjà citée de M. Equer.

méthode des moindres carrés à ces erreurs, en remarquant que les α députés du groupe A sont dans le même cas. On a ici pour la somme à rendre minima

$$\sigma = \Sigma\alpha\left(\frac{A}{\alpha} - \frac{S}{N}\right)^2 = \Sigma\frac{A^2}{\alpha} - 2\Sigma\frac{AS}{N} + \Sigma\alpha\frac{S^2}{N^2} = \Sigma\left(\frac{A^2}{\alpha} - 2A\frac{S}{N}\right) + \frac{S^2}{N}.$$

Ce qui rend ici les calculs assez délicats, c'est que ΣA n'est pas forcément égal à S; si en effet une liste n'a aucun siège, on ne peut pas faire $\alpha = 0$, ce qui rendrait infini $\frac{A^2}{\alpha}$, mais il faut négliger le terme correspondant; on ne tient pas compte des erreurs commises pour ces députés, puisqu'il n'y en a aucun. Les résultats obtenus par cette méthode ne conduisent par suite à aucune règle simple; nous nous bornerons à supposer que toutes les listes en présence ont au moins un représentant; aucun des nombres α, β, γ, ... n'est nul et la valeur de σ est alors

$$\sigma = \Sigma\frac{A^2}{\alpha} - 2\frac{S^2}{N} + \frac{S^2}{N} = \Sigma\frac{A^2}{\alpha} - \frac{S^2}{N}.$$

On est conduit à rendre minima $\Sigma\frac{A^2}{\alpha}\cdot$ Si l'on ajoute un siège au parti A, on est conduit à diminuer cette somme de $\frac{A^2}{\alpha(\alpha+1)}\cdot$ On classera donc par ordre de grandeur décroissante les nombres

$$\frac{A^2}{1.2},\ \frac{A^2}{2.3},\ \frac{A^2}{3.4},\ \ldots,\ \frac{A^2}{\alpha(\alpha-1)},\ \ldots,\ \frac{B^2}{1.2},\ \frac{B^2}{2.3}\ \ldots,\ \frac{B^2}{\beta(\beta-1)},\ \ldots,\ \frac{C^2}{1.2};\ \ldots,$$

et l'on prendra les N plus grands. On peut remplacer ces nombres par les suivants :

$$\frac{A}{2\sqrt{1.2}},\ \frac{A}{2\sqrt{2.3}},\ \frac{A}{2\sqrt{3.4}},\ \ldots,\ \frac{A}{2\sqrt{(\alpha-1)\alpha}},\ \frac{A}{2\sqrt{\alpha(\alpha+1)}},\ \ldots,$$
$$\frac{B}{2\sqrt{1.2}},\ \frac{B}{2\sqrt{2.3}},\ \ldots,\ \frac{B}{2\sqrt{\beta(\beta+1)}},\ \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on calcule les dénominateurs, on trouve, avec trois décimales,

2,828 4,898 6,928 8,944 10,954 12,961 14,966 ...;

soit très approximativement 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ..., c'est-à-dire les dénominateurs de la règle des moindres carrés, le premier siège, déjà donné par hypothèse, pouvant être supposé correspondant à 1.

Enfin, pour terminer ceci, considérons les erreurs commises pour chaque parti : le groupe A a droit à $a = \frac{AN}{S}$ députés, et il en reçoit α, d'où une erreur. On peut appliquer encore la méthode des moindres carrés. Cette nouvelle façon de traiter la question nous semble inacceptable, car on ne doit pas traiter de la même manière un parti composé de 1 électeur et un parti composé de 30000 électeurs; si cependant nous allons traiter ce cas, c'est à cause du résultat, qui est assez curieux : on est en effet conduit à la méthode bien connue des grands restes ([1]).

La méthode des moindres carrés donne ici

$$\sigma = \Sigma\left(\alpha - \frac{AN}{S}\right)^2 = \Sigma\left(\alpha - \frac{A}{Q}\right)^2 = \Sigma\alpha^2 - 2\Sigma\alpha\frac{A}{Q} + \Sigma\frac{A^2}{Q^2}.$$

On peut se borner à la seule partie variable de cette somme et considérer les accroissements qui se produisent quand on ajoute un siège à une liste quelconque. Un raisonnement analogue à celui qui a déjà été fait conduit ainsi à prendre les plus petits des nombres

$$1 - \frac{2A}{Q},\quad 3 - \frac{2A}{Q},\quad 5 - \frac{2A}{Q},\quad \ldots,\quad 1 - \frac{2B}{Q},\quad 3 - \frac{2B}{Q},\quad \ldots;$$

on peut leur ajouter l'unité, puis les multiplier tous par $\frac{Q}{2}$, ce qui conduit à prendre les plus petits des nombres du tableau suivant, et cela jusqu'à concurrence de N :

$$\begin{array}{llllll}
Q - A, & 2Q - A, & 3Q - A, & 4Q - A, & \ldots\ldots\ldots & \alpha Q - A, \quad \ldots, \\
Q - B, & 2Q - B, & 3Q - B, & \ldots\ldots\ldots, & \beta Q - B, & \ldots\ldots\ldots \\
Q - C, & 2Q - C, & \ldots\ldots\ldots & & & \\
\ldots\ldots & \ldots\ \ldots\ldots & & & &
\end{array}$$

Sur chaque ligne ces nombres sont tous positifs (si A ou B ou C ... est inférieur à Q) ou bien d'abord négatifs et ensuite positifs. Il y a

([1]) Cette remarque nous a été communiquée par M. Zivy, professeur au Lycée de Douai.

intérêt, puisque ici cela est possible, à prendre d'abord tous les nombres négatifs avant de prendre un seul nombre positif, c'est-à-dire à donner à la liste A, α' sièges, β' à B, etc. Les nombres restant à classer sont

$$(\alpha'+1)Q-A, \quad (\alpha'+2)Q-A, \quad \ldots, \quad (\beta'+1)Q-B, \quad \ldots.$$

Mais $(\alpha'+1)Q-A=(A-r_A)+Q-A=Q-r_A$, et l'on se trouve enfin amené, comme on le voit, à prendre les plus grands restes r_A, r_B, ... C'est la méthode connue sous le nom de *méthode des grands restes* ou *méthode suisse* ([1]).

6. Bien d'autres méthodes pourraient être proposées; nous avons déjà dit pourquoi la règle *des moindres carrés* nous semble préférable à toutes les autres. Nous allons cependant examiner à quelles conclusions on est conduit quand on prend pour apprécier la valeur d'une règle quelques autres critériums qui ont été indiqués, mais qui font intervenir des considérations particulières au problème électoral.

La répartition des sièges dans chaque circonscription peut sembler d'autant meilleure que les résultats globaux auxquels elle conduit sont plus voisins de ceux qu'aurait donnés la répartition directe des sièges faite aux listes globales obtenues en prenant les totaux des suffrages pour tout le pays.

Ce critérium semble difficile à appliquer, comme le montre l'exemple suivant :

Supposons qu'on ait seulement deux listes en présence A et B, et que les deux listes réunissent à peu près le même nombre de suffrages

---

([2]) Il y a deux méthodes analogues connues sous le nom de *méthode de La Chesnais* et *méthode de G. Moch*. La première est exactement celle qui précède; la deuxième effectue la division des nombres AN par S, ce qui donne encore les entiers α', β', γ', ... et attribue les sièges supplémentaires aux plus forts restes de division ou aux plus fortes listes non représentées après multiplication du nombre de suffrages par N. Ce sont exactement les mêmes nombres que ceux de la première méthode, mais après multiplication par N. Le classement est donc le même. Cependant la pratique montre que les nombres obtenus dans le second cas ne sont pas exactement le produit par N de ceux du premier. Cela tient à ce que, dans la division de S par N, M. La Chesnais s'arrête au chiffre des unités. Il va sans dire que, malgré la différence existant entre Q et sa partie entière, cela n'a aucune importance dans la pratique pour le résultat final.

dans tout le pays; la règle la meilleure sera alors celle qui partagera par moitié dans chaque circonscription les sièges entre les deux listes A et B, et cela pour aussi disproportionnés que soient les nombres des suffrages recueillis dans la circonscription considérée.

Un autre critérium, qui paraît conduire à des résultats plus acceptables, est le suivant. Si le mode de répartition considéré avantage les majorités, les partis électoraux se grouperont pour avoir plus d'élus qu'ils n'en auraient séparément. Inversement, s'il avantage les minorités, les partis se diviseront en autant de groupements qu'ils espèrent avoir de sièges. Le premier cas est celui de la méthode d'Hondt; le deuxième, celui de la méthode des grands restes. On peut donc chercher une règle qui ne favorise ni les groupements, ni les scissions. Le problème est indéterminé. Nous allons cependant montrer que cette condition conduit à préférer la règle des *moindres carrés* à celle d'Hondt.

Pour préciser l'énoncé, supposons que la règle à étudier conduise à prendre les plus grands nombres d'une liste telle que $f_1(\mathrm{A}), f_2(\mathrm{A}), \ldots, f_1(\mathrm{B}), \ldots$. Si la répartition des sièges ne change pas quand A, B, C, ... viennent simultanément à être doublés, triplés, etc., les fonctions ci-dessus sont de la forme $v\mathrm{A}^m$, v étant un coefficient convenable et m un exposant toujours le même. Il est facile de voir que, sans changer le classement, le tableau considéré pourra être remplacé par le suivant $\left(u = \frac{1}{\sqrt[m]{v}}\right)$:

$$\begin{array}{llllll}
\frac{\mathrm{A}}{u_1}, & \frac{\mathrm{A}}{u_2}, & \frac{\mathrm{A}}{u_3}, & \ldots, & \frac{\mathrm{A}}{u_\alpha}, & \ldots, \\
\frac{\mathrm{B}}{u_1}, & \frac{\mathrm{B}}{u_2}, & \ldots, & \frac{\mathrm{B}}{u_\beta}, & \ldots, & \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots, & &
\end{array}$$

les nombres u étant les inconnues du problème.

Bornons-nous au cas de trois partis A, B, C qui, séparés, ont respectivement α, β, γ suffrages et qui veulent se réunir en un seul parti groupant par suite $\mathrm{A} + \mathrm{B} + \mathrm{C} = \mathrm{M}$ suffrages. Les raisonnements sont les mêmes pour un nombre quelconque de partis, et d'autre part si l'on écrit qu'il n'y a ni gain ni perte probables pour les partis, on aura traité en même temps la question de savoir si M a ou non intérêt à se scinder en trois autres partis.

Δ étant un nombre convenablement choisi, on a, d'après les hypothèses faites,

$$\frac{A}{u_\alpha} > \Delta > \frac{A}{u_{\alpha+1}}, \qquad \frac{B}{u_\beta} > \Delta > \frac{B}{u_{\beta+1}}, \qquad \frac{C}{u_\gamma} > \Delta > \frac{C}{u_{\gamma+1}}$$

ou encore

$$\Delta\, u_{\alpha+1} > A > \Delta\, u_\alpha, \qquad \Delta\, u_{\beta+1} > B > \Delta\, u_\beta, \qquad \Delta\, u_{\gamma+1} > C > \Delta\, u_\gamma,$$

et par suite, pour M,

$$\Delta(u_{\alpha+1} + u_{\beta+1} + u_{\gamma+1}) > M > \Delta(u_\alpha + u_\beta + u_\gamma).$$

Toutes les valeurs de M entre ces limites étant également probables, nous prendrons pour M la moyenne des valeurs extrêmes; ce sera la moyenne des valeurs de M, pour un grand nombre d'élections analogues à celle que nous considérons :

$$M = \frac{u_\alpha + u_\beta + u_\gamma + u_{\alpha+1} + u_{\beta+1} + u_{\gamma+1}}{2}\,\Delta.$$

S'il n'y a ni gain ni perte pour les partis A, B, C, c'est que le parti M a $\alpha + \beta + \gamma$ sièges et que par suite

$$\Delta\, u_{\alpha+\beta+\gamma+1} > M > \Delta\, u_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Écrivons que la nouvelle valeur moyenne de M est égale à l'ancienne :

$$u_\alpha + u_{\alpha+1} + u_\beta + u_{\beta+1} + u_\gamma + u_{\gamma+1} = u_{\alpha+\beta+\gamma} + u_{\alpha+\beta+\gamma+1},$$

et ceci quels que soient les entiers α, β, γ.

Cherchons les nombres u ainsi définis. En remplaçant α seulement par $\alpha - 1$ et comparant les deux égalités, on a immédiatement $u_{\alpha+1} - u_{\alpha-1} = \text{const.} = k$. Les nombres u forment donc deux progressions arithmétiques de raison k, l'une concernant les termes de rang pair et l'autre les termes de rang impair. Si l'on désigne par p la demi-somme des deux premiers termes u_1 et u_2, et par q leur demidifférence, on trouve

$$u_{2n} = p + q + (n-1)k, \qquad u_{2n+1} = p - q + nk,$$

et par suite, quelle que soit la parité de n, $u_n + u_{n+1} = 2p + (n-1)k$. Portons ces valeurs de u dans l'égalité primitive en α, β, γ; on en tire aisément la nouvelle condition $k = 2p$; la loi des nombres u est parfaitement connue; mais les données du problème ne permettent point d'achever la détermination des valeurs numériques de u. Le lecteur verra aisément que la règle d'Hondt ne répond pas aux conditions obtenues, tandis que la règle des moindres carrés y répond et est même la seule suite formée d'une seule progression arithmétique et non de deux progressions enchevêtrées, qui réponde à l'énoncé.

7. Nous allons terminer ces quelques remarques mathématiques sur le problème de la représentation proportionnelle par une comparaison des deux méthodes d'Hondt et *des moindres carrés* en cherchant quelle est la probabilité pour qu'un parti B inférieur à un parti A gagne un siège avec la seconde, alors qu'il ne l'aurait pas avec la première (comme nous le verrons la méthode *des moindres carrés* est en effet plus avantageuse pour les minorités que celle d'Hondt). Posons $B = kA$, k étant inférieur à 1. Soit p le nombre total de sièges donnés à l'ensemble des partis A et B (p dépend dans une certaine mesure des autres listes, mais nous supposerons ici ce nombre fixe). La liste A a α sièges et α seulement si $\frac{A}{2\alpha - 1} > \frac{B}{2\beta + 1}$ et $\frac{B}{2\beta - 1} > \frac{A}{2\alpha + 1}$, d'où l'on tire ($\alpha + \beta = p$)

$$\frac{p}{k+1} + \frac{1}{2} > \alpha > \frac{p}{k+1} - \frac{1}{2}.$$

Le nombre de sièges α est donc l'entier le plus voisin de $\frac{p}{k-1}\cdot$ Des calculs analogues montrent que dans le cas de la règle d'Hondt la valeur de α est l'entier le plus voisin de $\frac{p}{k+1} + \frac{1-k}{2(1+k)}$ ou $\frac{p}{k+1} + h$, h allant d'ailleurs de 0 à $\frac{1}{2}\cdot$ On en déduit assez aisément que le rapport du nombre de fois où la liste A perd un siège à celui des fois où le nombre des sièges reste le même est $\frac{h}{1-h}\cdot$ On peut encore dire que la perte due pour la liste A à l'emploi de la règle *des moindres carrés* est en moyenne de h sièges (h n'étant pas d'ailleurs entier) soit ici $\frac{1-k}{2(1+k)}$, nombre qui va, comme nous l'avons dit, de 0 à $\frac{1}{2}$ quand k va de 1 à 0. Ce résultat est, comme on le voit, indépendant du nombre p des sièges attribués à l'ensemble des deux listes. Il montre que les petits partis gagnent presque un siège sur deux élections, tandis que le gain est plus faible pour des partis presque égaux à A. Si l'on suppose également probables toutes les valeurs de B inférieures à A, ou si l'on veut toutes les valeurs de k de 0 à 1, le gain moyen est donné par l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1-k}{2(1+k)} dk = \log 2 - \frac{1}{2} = 0,693\ldots - 0,5 = 0,193\ldots$$

qui est environ $\frac{1}{5}$; donc, une fois sur 5, un parti inférieur à A gagnera avec la méthode des moindres carrés un siège qu'il n'aurait pas eu avec la méthode d'Hondt. Le gain est appréciable, comme on le voit, pour un grand nombre d'élections, ou, ce qui revient au même, pour un grand nombre de circonscriptions.