Die Mathematik der doppelten Gerechtigkeit

Für ein Zuteilungsproblem, bei dem zwei konkurrierende Forderungen zugleich zu erfüllen sind, gibt es eine algorithmische Lösung. Sie ist so überzeugend, dass sie – unter anderem – für die Besetzung des Zürcher Gemeinderats praktiziert wird.

Von Michel Balinski
und Friedrich Pukelsheim

Wir haben das Vergnügen, über eine geradezu bilderbuchmäßig erfolgreiche Anwendung von Mathematik zu berichten. Einer der Autoren, Michel Balinski, erarbeitet in der Theorie eine Lösung eines Problems, an dem sich die mexikanische Legislative jahrelang vergeblich abgemüht hat. Der andere Autor, Friedrich Pukelsheim, arbeitet diese Lösung weiter aus und stellt sie auf seiner Website bereit. Wir beide veröffentlichen unsere Gedanken in der vorliegenden Zeitschrift (Spektrum der Wissenschaft 10/2002, S. 72 und 75).

Auf der Suche nach der Lösung eines gleichartigen Problems stößt Christian Schuhmacher, Leiter des Gesetzgebungsdiensts in der Verwaltung des Kantons Zürich, auf unsere Arbeiten. Es ist uns ein Leichtes, unsere Lösung den Zürcher Gegebenheiten anzupassen. Die vorbereitende parlamentarische Kommission und der Kantonsrat machen sich unseren Vorschlag mit großer Einmütigkeit zu eigen. Das »Neue Zürcher Zuteilungsverfahren« wird zum Gesetz und bei der Wahl zum Zürcher Gemeinderat am 12. Februar 2006 erstmals angewandt.

Es geht darum, die Parlamentssitze so zuzuteilen, dass die Wahlkreise proportional zu den Bevölkerungszahlen repräsentiert werden und die Parteien proportional zu ihren Stimmengewinnen. Im Parlament sollen also nicht nur von jeder Partei so viele Vertreter sitzen, wie ihrem Stimmenanteil am Gesamtergebnis entspricht, sondern auch von jedem Wahlkreis (jeder Region, jedem Bundesland …) so viele Vertreter, wie dessen Anteil an der Gesamtbevölkerung entspricht. Das Neue Zürcher Zuteilungsverfahren ist vor allem deswegen so überzeugend, weil es – mathematisch beweisbar – keine Umverteilung der Sitze gibt, durch die man dem Ideal der doppelt proportionalen Repräsentation näher käme.

Atemberaubendes Tempo des Schweizerischen Bundesgerichts

Bis 2002 wurden bei den Wahlen für den Zürcher Gemeinderat die Vertreter jedes Wahlkreises ausschließlich aus den in diesem Wahlkreis abgegebenen Stimmen ermittelt. Da beispielsweise der Wahlkreis 1 wegen seiner geringen Wählerzahl nur zwei Vertreter in den Gemeinderat zu entsenden hatte, war jede Stimme, die in diesem Wahlkreis für eine der kleineren Parteien abgegeben wurde, von vornherein wertlos, obgleich für dieselbe Partei im gesamten Stadtgebiet mehr als genügend Stimmen für einen Gemeinderatssitz zusammenkamen. Gegen diese Ungleichbehandlung legte nach der Wahl im März 2002 ein Bürger beim Schweizerischen Bundesgericht Beschwerde ein – mit Erfolg. Nach nur neun Monaten gab das Bundesgericht der Beschwerde statt (während das deutsche Bundesverfassungsgericht nach vier Jahren noch nicht einmal die Einsprüche gegen die vorletzte Bundestagswahl von 2002 erledigt hat). Das war der Auslöser einer Suche nach Abhilfe, die in dem beschriebenen Gesetz endete.

Zürich mit seinem neuen Zuteilungsverfahren macht den Anfang, die Kantone Aargau und Schaffhausen erwägen zu folgen. Darüber hinaus sind doppelt proportionale Sitzzuteilungsverfahren überall von Interesse, wo die Zusammensetzung des Parlaments neben der parteipolitischen Landschaft auch die regionale Bevölkerungsaufteilung widerspiegeln soll. Das gilt für Belgien mit seiner Sprachenvielfalt ebenso wie für die Färöer-Inseln, die in der dänischen Reichsgemeinschaft einen hohen Grad an Autonomie genießen, und für die Europäische Union, deren Mitgliedstaaten ihre nationale Repräsentation im Europäischen Parlament garantiert sehen wollen.

Früher bildete jeder der zwölf Bezirke (»Stadtkreise«) Zürichs einen Wahlkreis für sich, wobei auf Kreis 1 nur besagte zwei Sitze entfielen. Für die Wahl 2006 wurden die drei kleinen Kreise 1, 5 und 8 mit größeren zusammengelegt, um Kleinstwahlkreise zu vermeiden. Nach der Neugliederung entsendet jeder Wahlkreis entsprechend seiner Bevölkerungszahl 10 bis 19 Abgeordnete ins Stadtparlament.

Jeder Wähler hat so viele Stimmen, wie in seinem Wahlkreis Sitze zu vergeben sind. Um die Stimmen im Wahlgebiet auf einen Nenner zu bringen, werden die Stimmenzahlen in jedem Wahlkreis durch die Wahlkreisgröße (die Anzahl der

BEIDE FOTOS: MARTIN ZACHARIASEN, UNIVERSITÄT KOPENHAGEN

Der Autor Friedrich Pukelsheim beobachtet gespannt die Auszählung der Ergebnisse der Zürcher Gemeinderatswahl am 12. Februar 2006, die erstmals nach dem von ihm ausgearbeiteten Neuen Zürcher Zuteilungsverfahren abläuft.

auf diesen Wahlkreis entfallenden Sitze) geteilt und zur nächstgelegenen ganzen Zahl gerundet. Das Ergebnis sind die »Wahlkreiswählerzahlen« (Tabelle S. 78). Für die folgende Diskussion können wir mit vernachlässigbarem Fehler unterstellen, jeder Wähler hätte genau eine Stimme und die Wahlkreiswählerzahlen wären die Anzahlen dieser Stimmen.

Das neue Zuteilungsverfahren rechnet in zwei Schritten. Für die »Oberzuteilung« werden die Wahlkreiswählerzahlen einer Partei über alle neun Wahlkreise aufsummiert. Proportional zu diesen kumulierten »Wählerzahlen« sollen die zu vergebenden Sitze den Parteien zugeteilt werden, und zwar zunächst ohne Rücksicht auf die Verhältnisse in den einzelnen Wahlkreisen. Das ist eine einfache Dreisatzaufgabe. Da insgesamt 66327 Stimmen für 125 Sitze abgegeben wurden, entfallen auf jeden Sitz 66327 / 125 = 530,616 Wählerstimmen.

Man teile die Stimmenzahl jeder Partei durch 530,616 und erhält die dieser Partei zustehende Sitzzahl. Da das im Allgemeinen keine ganze Zahl ist, muss gerundet werden: Aus dem Quotienten 43,68 für die SP (Sozialdemokratische Partei) ergeben sich 44 Sitze; der Quotient 3,19 für die SD (Schweizer Demokraten) wird zu 3. Das ist die auch im kaufmännischen Bereich übliche Standardrundung. Andere Verfahren, etwa Abrunden zur nächstniederen ganzen Zahl, werden auch praktiziert, haben aber erhebliche Nachteile (siehe unten).

Wegen der Rundung ergeben die so errechneten Sitzzahlen möglicherweise nicht genau die geforderte Gesamtzahl (in diesem Fall 125). Dem kann man abhelfen, indem man den »Stadtdivisor« 530,616 geeignet verändert. Macht man ihn beispielsweise kleiner, so werden die Quotienten größer, bis einer von ihnen die entscheidende Grenze »ganze Zahl plus 0,5« überwindet und nach oben statt nach unten gerundet wird, wodurch die Gesamtzahl der Sitze um 1 steigt.

Theoretisch kann sich dieses Umspringen bei zwei Quotienten zugleich ereignen, etwa wenn zwei Parteien exakt die gleiche Stimmenzahl errungen haben. In diesem Fall würde die Sitzzahl gleich um 2 ansteigen und damit möglicherweise den geforderten Wert verfehlen. In der Praxis sind diese Fälle ohne Bedeutung. Die meisten Wahlgesetze schreiben vor, dass solche Pattsituationen durch Losentscheid aufzulösen sind.

Subtile Balance zwischen zwei Zielen

In unserem Beispielfall muss der Divisor 530,616 gar nicht nachgebessert werden. Alle Divisoren zwischen 528,206 und 532,873 reproduzieren die in der Tabelle aufgeführten Sitzzahlen.

Für das weitere Verfahren sind diese Gesamtsitzzahlen für die Parteien ebenso als konstant anzusehen wie die vorab festgelegten Wahlkreisgrößen.

Der zweite und neue Schritt des Verfahrens ist die »Unterzuteilung«; hier werden die Sitze jedes Wahlkreises den Parteien entsprechend ihrer Stimmenzahl in dem jeweiligen Wahlkreis zugeteilt. Dabei gilt es sowohl die vorgeschriebenen Wahlkreisgrößen einzuhalten als auch die in der Oberzuteilung bestimmten Parteisitzzahlen auszuschöpfen. Weil es nun zwei Bedingungen zu erfüllen gilt, gibt es auch zwei Gruppen von Schlüsselzahlen: Wahlkreisdivisoren und Parteidivisoren.

Ansonsten folgt die Rechnung demselben Schema wie vorher, nur dass jetzt pro Wahlkreis und Partei die Wählerzahl zweimal geteilt wird, sowohl durch den zugehörigen Wahlkreisdivisor als auch durch den entsprechenden Parteidivisor. Schließlich wird der sich ergebende Quotient zur nächstgelegenen ganzen Zahl gerundet.

Randbedingungen (Wahlkreisgrößen und Parteisitzzahlen) sowie Zuteilungsschlüssel (Wahlkreis- und Parteidivisoren) bilden einen Rahmen um den Kern der Tabelle. Zum Beispiel ergibt sich in Wahlkreis 12 für die SP der Quotient $1322/(400 \cdot 1{,}01) = 3{,}27$, der zu 3 Sitzen gerundet wird.

Wie ermittelt man die Schlüsselzahlen? Man berechnet zunächst für jeden Wahlkreis einen Wahlkreisdivisor, mit dem die Wahlkreisgröße ausge- ▷

schöpft wird. Dabei ergeben sich in aller Regel noch nicht die richtigen Parteisitzzahlen. Daher berechnet man im zweiten Durchgang mit den soeben skalierten Wählerzahlen (man dividiert jede Wählerzahl durch den aktuellen Wahlkreisdivisor) Parteidivisoren, sodass die korrekten Parteisitzzahlen erreicht werden.

Wenn man jetzt jede Wählerzahl durch ihren zugehörigen Wahlkreis- und Parteidivisor teilt und dann rundet, stimmen im Allgemeinen die Wahlkreisgrößen nicht mehr. Also passt man diese an, indem man mit den skalierten Wählerzahlen (diesmal Wählerzahl durch aktuellen Parteidivisor) neue Wahlkreisdivisoren berechnet, und so weiter.

Es scheint so, als würde man ständig die eine Sorte Größen nachbessern und dabei in Kauf nehmen, dass die Größen der anderen Sorte verrutschen. Aber die gute Nachricht ist: Es rutscht sich zurecht. In unserem Fall ist nach fünf Durchgängen ein Ergebnis erreicht, das beide Bedingungen erfüllt. Die Rechenarbeit erledigt – zum Beispiel – ein Computerprogramm namens »Bazi«, das die Augsburger Mathematikergruppe frei benutzbar ins Internet gestellt hat (www.uni-augsburg.de/bazi).

Auf den ersten Blick sieht das Ergebnis etwas merkwürdig aus. Der zentrale Grundsatz der Erfolgswertgleichheit besagt, dass jede Wählerstimme den gleichen Beitrag zu einem Wahlerfolg haben soll, einerlei in welchem Wahlkreis oder für welche Partei sie abgegeben wird, oder, was auf dasselbe hinausläuft, dass für jeden Sitz, gleich für welche Partei und welchen Wahlkreis, ungefähr die gleiche Anzahl an Stimmen erforderlich sein soll, in unserem Beispiel eben 530 Stück. Da wirkt es seltsam, dass in Wahlkreis 9 der SP 2628 Stimmen für sechs Sitze genügen, während dieselbe Partei in Wahlkreis 10 für 2938 Stimmen nur lumpige vier Sitze bekommt. In Kreis 11 sind für 777 Stimmen schon zwei CVP-Sitze zu haben, im Kreis 7-8 gibt es für deutlich mehr, nämlich 837 Stimmen, nur einen Sitz. Im selben Wahlkreis ist die FDP wesentlich billiger, nämlich mit 603 Stimmen pro Stück, an ihre fünf Sitze gekommen.

Und schon argumentiert die CVP, im Wahlkreis 7-8 stünde ihr auf Kosten der FDP ein Sitz mehr zu; denn dann käme die Aufteilung dem Prinzip der Erfolgswertgleichheit wesentlich näher. Oder der SP-Kandidat aus Kreis 10, dessen Listenplatz gerade nicht mehr für einen Einzug ins Parlament gereicht hat, macht seinem Parteifreund aus Kreis 9 den gerade noch errungenen Stadtratssitz streitig. Was ist auf derlei Ansprüche zu erwidern?

Vermeidung paarweiser Konflikte

Die Frage läuft auf die Eigenschaft der »Kohärenz« hinaus, die Michel Balinski in seinem Artikel »Die Mathematik der Gerechtigkeit« (Spektrum der Wissenschaft 3/2004, S. 90) in allgemeinerem Zusammenhang diskutiert. Kohärenz bedeutet: Zwischen je zwei Parteien sollten die von beiden zusammen errungenen Sitze so aufgeteilt sein, dass beide das Ergebnis als unstrittig und gerecht empfin-

Das Neue Zürcher Zuteilungsverfahren

Die Zuteilung der 125 Sitze bei der Zürcher Gemeinderatswahl am 12. Februar 2006 erfolgt in zwei Schritten. Für die Oberzuteilung werden die Wählerzahlen durch den Stadtdivisor geteilt und der resultierende Quotient zur Parteisitzzahl gerundet. Beispiel SP: 23180 / 530 = 43,74 ↗ 44 Sitze. In der Unterzuteilung werden die Wahlkreiswählerzahlen zweimal geteilt – durch den zugehörigen Wahlkreisdivisor wie auch durch den Parteidivisor – und erst dann gerundet. Beispiel SP in Wahlkreis 12 : 1322 / (400 · 1,01) = 3,27 ↘ 3. Die Divisoren sind so berechnet, dass Wahlkreisgrößen und Parteisitzzahlen genau ausgeschöpft werden.

		SP	SVP	FDP	Grüne	CVP	EVP	AL	SD	
Oberzuteilung im gesamten Wahlgebiet (Wählerzahl Parteisitzzahl)										Stadtdivisor
		23180 **44**	12633 **24**	10300 **19**	7501 **14**	5418 **10**	3088 **6**	2517 **5**	1692 **3**	530
Unterzuteilung an die Wahlkreise (Wahlkreiswählerzahl Wahlkreis-Parteisitzzahl)										Wahlkreisdivisor
Wahlkreis	125	44	24	19	14	10	6	5	3	
Kreis 1-2	12	2377 **4**	1275 **2**	1819 **3**	1033 **2**	610 **1**	236 **0**	201 **0**	138 **0**	600
Kreis 3	16	2846 **7**	1379 **3**	653 **1**	1082 **3**	541 **1**	176 **0**	464 **1**	198 **0**	432
Kreis 4-5	13	2052 **5**	629 **2**	349 **1**	786 **2**	315 **1**	79 **0**	699 **2**	108 **0**	400
Kreis 6	10	2409 **4**	968 **1**	1092 **2**	842 **1**	440 **1**	342 **1**	230 **0**	111 **0**	660
Kreis 7-8	17	3632 **5**	1642 **2**	3015 **5**	1499 **2**	837 **1**	618 **1**	323 **1**	144 **0**	660
Kreis 9	16	2628 **6**	1972 **4**	754 **2**	572 **1**	708 **1**	615 **1**	154 **0**	333 **1**	473
Kreis 10	12	2938 **4**	1630 **3**	1272 **2**	807 **1**	696 **1**	391 **1**	212 **0**	124 **0**	650
Kreis 11	19	2976 **6**	2113 **4**	1039 **2**	661 **1**	777 **2**	631 **2**	191 **1**	328 **1**	470
Kreis 12	10	1322 **3**	1025 **3**	307 **1**	219 **1**	494 **1**	0 **0**	43 **0**	208 **1**	400
Parteidivisor		1,01	1	1,01	1	1	0,88	0,8	1	

SP Sozialdemokratische Partei
SVP Schweizerische Volkspartei
FDP Freisinnig-Demokratische Partei
Grüne Grüne
CVP Christlichdemokratische Volkspartei
EVP Evangelische Volkspartei
AL Alternative Liste/PdA
SD Schweizer Demokraten

den. Eine faire Sitzzuteilung für das Gesamtproblem muss also auch aus der Sicht eines jeden Teilproblems – man betrachte etwa nur zwei Parteien und die für sie abgegebenen Stimmen und lasse alles andere außer Acht – fair erscheinen.

Ist die Oberzuteilung in Tabelle 1 kohärent? Widersteht sie dem neidvoll vorgetragenen Anspruch jeder Partei, dass ihr ein Sitz eher zustehe als einer anderen? Nehmen wir das Teilproblem, das aus den Parteien SP und AL besteht. Sie erhalten gemeinsam 44 + 5 = 49 Sitze bei zusammen 23 180 + 2517 = 25 697 Wählern. Das ergibt einen Idealanspruch von 49 · 23 180 / 25 697 = 44,20 Sitzen für die SP und von 4,80 Sitzen für die AL. Die gerundeten Idealansprüche von SP und AL ergeben 44 und 5 Sitze, und das ist genau das, was die beiden eh schon haben. Diese Paarung findet also keinen Anlass, zu streiten.

Schwachpunkt dieser Argumentation ist, dass sie auf die Parteien starrt. Wichtiger als die Parteien ist der demokratische Souverän, das Wahlvolk. Aber auch die Wählersicht kommt zum selben Ergebnis, wenn auch auf anderem Weg. Bei x SP-Sitzen kommt jedem der 23 180 SP-Wähler der Erfolgsanteil x / 23 180 zu. Das heißt, jede SP-Wählerin und jeder SP-Wähler trägt einen Anteil von x / 23 108 zum Sitzerfolg der Partei ihrer Wahl bei. Die 2517 AL-Wähler erzielen den Erfolgswert $(49-x)/2517$. (Der Erfolgswert ist der Kehrwert des oben diskutierten »Preises« für einen Sitz. Das Ziel der gleichen Erfolgswerte aller Wählerstimmen ist der zentrale Ansatzpunkt in den Überlegungen der Verfassungsgerichte.)

Aus dem Grundsatz der Erfolgswertgleichheit folgt also die Gleichung

$$\frac{x}{23180} = \frac{49-x}{2517}$$

Die Lösung ist $x = 44{,}20$ und somit dieselbe, die der parteienorientierte Ansatz liefert. Beim Vergleich von SP und AL werden also deren Wähler wie auch die beiden Parteien selbst gerecht bedient. Die Überprüfung sämtlicher 28 Parteienpaare liefert dasselbe Ergebnis, wie mathematisch beweisbar ist:

Es gibt genau ein Zuteilungsverfahren, für das bei allen denkbaren paarweisen Vergleichen kein Beteiligter einen rechnerischen Anlass findet, einem anderen einen Sitz wegzunehmen. Dieses Verfahren teilt von zwei Parteien beiden so viele Sitze zu, wie der zur nächsten ganzen Zahl gerundete Idealanspruch ausmacht, wenn die gemeinsamen Sitze neu aufgeteilt würden.

Dieses konfliktminimierende, kohärente Verfahren ist die beschriebene Divisormethode mit Standardrundung (nach Webster, Sainte-Laguë und Schepers). Dagegen würde die Divisormethode mit Abrundung (nach Jefferson, D'Hondt und Hagenbach-Bischoff) im Beispiel der SP 45 und der AL 4 Sitze zuteilen und damit über Kreuz mit den Idealansprüchen geraten.

Eine Übersicht über die historischen Autoritäten, von denen die Zuteilungsmethoden ihre Namen haben, bietet die von Friedrich Pukelsheim zusammengetragene Ahnengalerie in Spektrum der Wissenschaft 9/2002, S. 83.

Berner Doppelquotient

Damit ist zunächst die Oberzuteilung über jede Anfechtung erhaben. Was aber ist mit den oben angesprochenen Merkwürdigkeiten der Unterzuteilung?

Die erste Antwort ist: Einfach in einem Wahlkreis einen Sitz von einer Partei zu einer anderen zu schieben ist verboten; dadurch würden ja die fest vorgegebenen Parteisitzzahlen verändert. Es wäre allenfalls eine Art Ringtausch denkbar, eine so genannte Viererkette, zum Beispiel: Die SP gibt einen Sitz im Kreis 11 an die SVP ab und bekommt dafür in Kreis 12 von ihr einen Sitz zurück. Es ändern sich vier Zahlen in der Tabelle, und alle Wahlkreisgrößen und Parteisitzzahlen bleiben unverändert.

Die Frage muss also lauten: Harmonieren die zugeteilten Sitze mit den Wählerzahlen 2976, 1322, 2113 und 1025, oder ist das Zuteilungsergebnis angreifbar? Für dieses Teilproblem sind die Sitzzahlen jeder Partei in beiden Wahlkreisen zusammen (9 für die SP und 7 für die SVP) ebenso vorgegeben wie die Sitzzahlen jedes Wahlkreises für beide Parteien zusammen (10 in Wahlkreis 11 und 6 in Wahlkreis 12). Erhält nun die SP ideale x Sitze in Wahlkreis 11, dann bleiben ihr $9-x$ in Wahlkreis 12. Die SVP bekommt $10-x$ beziehungsweise $x-3$ Sitze. Das Prinzip der Erfolgswertgleichheit würde fordern, dass $x/2976 = (9-x)/1322 = (10-x)/2113 = (x-3)/1025$ gilt, und das ist sogar als Ideal unmöglich. Eine Lösung x, die das leistet, gibt es nicht.

	SP Idealanspruch		SVP Idealanspruch		
Kreis 11	2976 **6**	$x = 5{,}71$	2113 **4**	$10-x = 4{,}29$	**10**
Kreis 12	1322 **3**	$9-x = 3{,}29$	1025 **3**	$x-3 = 2{,}71$	**6**
Summe	**9**		**7**		**16**

Die Kohärenzprüfung dieser Viererkette ergibt als Lösung der im Text genannten Bestimmungsgleichung $x = 5{,}71$. Die resultierenden Idealansprüche reproduzieren die schon vorliegenden Sitzzahlen. Das gilt beim Neuen Zürcher Zuteilungsverfahren für jede beliebige Transferkette.

Was wäre also ein geeignetes Hilfsmittel, um vier Erfolgswerte gegeneinander abzuwägen? Schauen wir abermals in die Schweiz. In das Wahlgesetz des Kantons Bern wurde 1980 der so genannte Doppelquotient eingeführt. Er wird mit anderen Zahlen definiert und anders verwendet als hier; trotz dieser Unterschiede weist das Konzept den Weg zum Ziel.

Die Idee ist folgende: Eine gewisse Ungleichheit hat das Teilproblem von der Lösung des Gesamtproblems geerbt, und zwar in Gestalt der fest vorgegebenen Randwerte. Für einen Sitz in Wahlkreis 11 sind – im Teilproblem – $(2976 + 2113)/10 = 508{,}9$ Stimmen erforderlich, für einen Sitz im Wahlkreis 12 nur $(1322 + 1025)/6 = 391{,}2$ Stimmen. Wohlgemerkt: Diese Ungleichheit beruht nicht auf Willkür, sondern wird im Interesse einer Gleichheit »auf höherer Ebene« in Kauf genommen. Wenn sie nun schon nicht zu vermeiden ist, soll sie wenigstens gleichmäßig auf die Parteien aufgeteilt werden. Das Verhältnis der Erfolgswerte soll für beide Parteien dasselbe sein:

$$\frac{\dfrac{x}{2976}}{\dfrac{9-x}{1322}} = \frac{\dfrac{10-x}{2113}}{\dfrac{x-3}{1025}}$$

Eine analoge Ungleichheit gilt für die Parteien: Im Teilproblem sind 477,6 Stimmen für einen SP-Sitz erforderlich, aber nur 448,3 Stimmen für einen SVP-Sitz. Da kann man verlangen, dass beide ▷

Kohärenzprüfung beliebiger Transferketten

Eine Transferkette besteht aus zwei Wahlkreisen pro beteiligter Partei und zwei Parteien pro beteiligtem Wahlkreis; die Randsummen gelten als fest. Die in der Tabelle unten angezeigte Sechser-Kette führt zu der Bestimmungsgleichung

$$\frac{x}{2846}\cdot\frac{x-5}{1499}\cdot\frac{x-5}{631}=\frac{12-x}{3632}\cdot\frac{8-x}{661}\cdot\frac{7-x}{176}$$

mit der Lösung $x=6{,}63$ und den angegebenen Idealansprüchen. Im Beispiel gibt es eine gegenläufige Sitzvergabe in Wahlkreis 11 (2 Sitze auf 631 Wähler, aber nur 1 auf 661) und eine innerhalb der SP (7 Sitze auf 2846 Wähler, aber nur 5 auf 3632). Die Idealansprüche belegen, dass bei Wahrung der Randsummen mehr Ausgewogenheit nicht erreichbar ist.

	SP Idealanspruch	Grüne Idealanspruch	EVP Idealanspruch	
Kreis 3	2846 7 $x=$**6,63**		176 0 $7-x=$**0,37**	7
Kreis 7-8	3632 5 $12-x=$**5,37**	1499 2 $x-5=$**1,63**		7
Kreis 11		661 1 $8-x=$**1,37**	631 2 $x-5=$**1,63**	3
Summe	12	3	2	17

▷ Wahlkreise unter dieser Ungleichheit im gleichen Maß zu leiden haben:

$$\frac{\dfrac{x}{2976}}{\dfrac{10-x}{2113}}=\frac{\dfrac{9-x}{1322}}{\dfrac{x-3}{1025}}$$

Macht man diese Gleichungen etwas übersichtlicher, indem man die Nenner hochmultipliziert, so stellen sie sich als identisch heraus:

$$\frac{x}{2976}\cdot\frac{10-x}{2113}=\frac{9-x}{1322}\cdot\frac{x-3}{1025}$$

Das ist eine quadratische Gleichung, von deren beiden Lösungen nur $x=5{,}71$ sinnvoll ist. Damit sind sämtliche Idealansprüche in der diskutierten Viererkette bestimmt. Sie rechtfertigen die Sitzzahlen aus der Tabelle S. 78.

Viererketten sind nur die einfachste Möglichkeit, die Sitzverteilung anzufechten. An einem Ringtausch könnten auch mehr als zwei Parteien und entsprechend viele Wahlkreise beteiligt sein. Zu dem entsprechenden Teilproblem tragen jeder beteiligte Wahlkreis und jede beteiligte Partei genau zwei Wählerzahlen bei. Es gibt Vierer-, Sechser-, Achter- und allgemein $2n$-Ketten. Aus den $2n$ Erfolgswerten entlang einer Kette ergibt sich die Bestimmungsgleichung für die zugehörigen Idealansprüche. Die Tabelle im Kasten oben zeigt eine interessante Sechserkette. Die zugehörige Bestimmungsgleichung folgt der Produktgestalt der Vierergleichung.

In allen Transferketten rechtfertigen die gerundeten Idealansprüche genau die Zahlen, die zur Prüfung vorliegen:

Es gibt genau ein Zuteilungsverfahren der Sitze auf die Wahlkreise und Parteien, für das bei allen denkbaren Transferketten kein Beteiligter einen rechnerischen Anlass findet, einem anderen einen Sitz wegzunehmen. Dieses Verfahren teilt in jeder Transferkette pro Wahlkreis und Partei so viele Sitze zu, wie der zur nächsten ganzen Zahl gerundete Idealanspruch ausmacht, wenn die Sitze unter Wahrung der Wahlkreis- und Parteierfolge neu aufgeteilt würden.

Die eindeutig bestimmte in diesem Sinn kohärente Methode ist das Neue Zürcher Zuteilungsverfahren. Ihre Sitzzuteilungen erweisen sich also deshalb als so stabil, weil jeder denkbare Sitztransfer unweigerlich von den Idealansprüchen wegführt.

Wir haben unser Verfahren mit dem Argument gerechtfertigt, dass es den Idealansprüchen entlang der beschriebenen Transferketten am nächsten kommt. Das ist zunächst nur eines von vielen denkbaren Argumenten. Es hat allerdings den unschätzbaren Vorteil, dass es der Erfolgswertgleichheit der Wählerstimmen eine zentrale Rolle zuweist. Damit passt es präzise in das Argumentationsmuster der (deutschen wie Schweizer) Verfassungsgerichte.

Es ist nicht auszuschließen, dass die Parteien ihre Ansprüche lieber anders definiert sehen würden; nur ist bislang keine überzeugende Alternative zu sehen.

Wirklich stabil ist das Neue Zürcher Zuteilungsverfahren deshalb wohl nicht wegen seiner mathematischen Eigenschaften, sondern weil es das vormathematische, von einem politischen Grundkonsens in Parlament und Regierung getragene Ziel eines Doppelmaßes an Proportionalität realisiert. ◁

RIDA LARAKI

Autoren und Literatur

Michel Balinski (links) ist Professor im Institut für Ökonometrie an der École Polytechnique in Paris. **Friedrich Pukelsheim** ist Professor für Mathematik an der Universität Augsburg. Über der Wandtafel die Väter der französischen Mathematik (und Schöpfer früher Theorien der Gerechtigkeit), von links nach rechts: Joseph-Louis Lagrange, Gaspard Monge, Augustin Louis Cauchy, Siméon-Denis Poisson und Pierre-Simon Laplace.

Mathematics and democracy. Recent advances in voting systems and collective choice. Von Friedrich Pukelsheim und Bruno Simeone (Hg.). Springer, Berlin 2006

Weblinks zu diesem Thema finden Sie unter www.spektrum.de/artikel/866417.