*1982 г. ноябрь — декабрь* *т. 37, вып. 6(228)*

*УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК*

УДК 519.21

# О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ КОНТИГУАЛЬНОСТИ И ПОЛНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ РАЗДЕЛИМОСТИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

Р. Ш. Липцер, Ф. Пукельшейм, А. Н. Ширяев

СОДЕРЖАНИЕ



## § 1. Введение. Формулировка основных результатов

1. Пусть $(\Omega^n, \mathscr{F}^n)_{n\geqslant 1}$ — последовательность измеримых пространств, $\mathbf{P}^n$ и $\widetilde{\mathbf{P}}^n$ — вероятностные меры на $(\Omega^n, \mathscr{F}^n)$, $n \geqslant 1$.

Определение 1 ([1] — [6]). Последовательность мер $(\widetilde{\mathbf{P}}^n)_{n\geqslant 1}$ называется *контигуальной* [1]) по отношению к последовательности мер $(\mathbf{P}^n)_{n\geqslant 1}$ (обозначение: $(\widetilde{\mathbf{P}}^n) \lhd (\mathbf{P}^n)$), если для любой последовательности множеств $(A^n)_{n\geqslant 1}$ с $A^n \in \mathscr{F}^n$

$$(1.1) \qquad \lim_n \mathbf{P}^n(A^n) = 0 \Rightarrow \lim_n \widetilde{\mathbf{P}}^n(A^n) = 0.$$

Определение 2 ([7] — [10]). Последовательности мер $(\widetilde{\mathbf{P}}^n)_{n\geqslant 1}$ и $(\mathbf{P}^n)_{n\geqslant 1}$ называются *вполне асимптотически разделимыми* (обозначение: $(\widetilde{\mathbf{P}}^n) \bigtriangleup (\mathbf{P}^n)$), если существует подпоследовательность $(n')$ и множества $A^{n'} \in \mathscr{F}^{n'}$ такие, что $\lim\limits_{n'} \mathbf{P}^{n'}(A^{n'}) = 0$, и в то же время $\lim\limits_{n'} \widetilde{\mathbf{P}}^{n'}(A^{n'}) = 1$.

Замечание 1. В том частном случае, когда $(\Omega^n, \mathscr{F}^n) \equiv (\Omega, \mathscr{F})$ и $\mathbf{P}^n \equiv \mathbf{P}$, $\widetilde{\mathbf{P}}^n \equiv \mathbf{P}$, т. е. когда рассматриваемые измеримые пространства и меры не зависят от $n$, свойство контигуальности превращается в свойство абсолютной непрерывности ($\widetilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{P}$) меры $\widetilde{\mathbf{P}}$ относительно $\mathbf{P}$, а полная асимптотическая разделимость будет означать сингулярность ($\widetilde{\mathbf{P}} \perp \mathbf{P}$) мер $\widetilde{\mathbf{P}}$ и $\mathbf{P}$.

[1]) Contiguity (*англ.*) — смежность, соприкосновение, близость.

**2.** Во всем дальнейшем будет предполагаться, что наряду с измеримыми пространствами $(\Omega^n, \mathscr{F}^n)$ при каждом $n \geqslant 1$ заданы семейства $\sigma$-алгебр $\mathbf{F}^n = (\mathscr{F}^n_k)_{k\geqslant 0}$ такие, что $\mathscr{F}^n_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F}^n_k \subseteq \mathscr{F}^n_{k+1} \subseteq \mathscr{F}^n$ и $\mathscr{F}^n = \sigma(\bigcup_k \mathscr{F}^n_k)$. Обозначим $\mathbf{P}^n_k = \mathbf{P}^n \mid \mathscr{F}^n_k$ и $\widetilde{\mathbf{P}}^n_k = \widetilde{\mathbf{P}}^n \mid \mathscr{F}^n_k$ — сужения вероятностных мер $\mathbf{P}^n$ и $\widetilde{\mathbf{P}}^n$ на $\sigma$-алгебры $\mathscr{F}^n_k$.

Замечание 2. Пусть на $(\Omega, \mathscr{F})$ заданы две вероятностные меры $\mathbf{P}$ и $\widetilde{\mathbf{P}}$, $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_k)_{k\geqslant 0}$ — семейство $\sigma$-алгебр, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F}_k \subseteq \mathscr{F}_{k+1} \subseteq \mathscr{F}$, $\mathscr{F} = \sigma(\bigcup_k \mathscr{F}_k)$ и $\mathbf{P}_k = \mathbf{P} \mid \mathscr{F}_k$, $\widetilde{\mathbf{P}}_k = \widetilde{\mathbf{P}} \mid \mathscr{F}_k$. Тогда контигуальность семейства мер $(\widetilde{\mathbf{P}}_k)_{k\geqslant 0}$ по отношению к $(\mathbf{P}_k)_{k\geqslant 0}$, рассматриваемых на $(\Omega, \mathscr{F}_k)_{k\geqslant 0}$, равносильна тому, что мера $\widetilde{\mathbf{P}}$ абсолютно непрерывна по отношению к мере $\mathbf{P}$. Иначе говоря, в этом частном случае

$$(\widetilde{\mathbf{P}}_k) \lhd (\mathbf{P}_k) \Longleftrightarrow \widetilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{P}.$$

Аналогичным образом

$$(\widetilde{\mathbf{P}}_k) \bigtriangleup (\mathbf{P}_k) \Longleftrightarrow \widetilde{\mathbf{P}} \perp \mathbf{P}.$$

**3.** Для того чтобы сформулировать результаты настоящей работы и объяснить их связь с предшествующими результатами, введем ряд обозначений.

Пусть $\mathbf{Q}^n = \frac{1}{2}(\widetilde{\mathbf{P}}^n + \mathbf{P}^n)$, $\mathbf{Q}^n_k = \mathbf{Q}^n \mid \mathscr{F}^n_k$ $\left( = \frac{1}{2}(\widetilde{\mathbf{P}}^n_k + \mathbf{P}^n_k)\right)$. Для всякого $0 \leqslant a \leqslant \infty$ положим

$$a^{\oplus} = \begin{cases} 0, & a = 0, \\ a^{-1}, & 0 < a < \infty, \\ 0, & a = \infty, \end{cases} \qquad a^{\ominus} = \begin{cases} 0, & a = 0, \\ a^{-1}, & 0 < a < \infty, \\ \infty, & a = \infty, \end{cases} \tag{1.2}$$

и будем обозначать

$$\mathfrak{z}_{nk} = \frac{d\mathbf{P}^n_k}{d\mathbf{Q}^n_k}, \quad \widetilde{\mathfrak{z}}_{nk} = \frac{d\widetilde{\mathbf{P}}^n_k}{d\mathbf{Q}^n_k}$$

— производные Радона — Никодима мер $\mathbf{P}^n_k$ и $\widetilde{\mathbf{P}}^n_k$ по мере $\mathbf{Q}^n_k$. (Всюду далее рассматриваются конечные варианты производных Радона — Никодима.)

Положим также (для $k \geqslant 1$)

$$\beta_{nk} = \mathfrak{z}_{nk} \cdot \mathfrak{z}^{\ominus}_{n,\,k-1}, \quad \widetilde{\beta}_{nk} = \widetilde{\mathfrak{z}}_{nk} \cdot \widetilde{\mathfrak{z}}^{\ominus}_{n,\,k-1}, \tag{1.3}$$

условившись считать $\mathfrak{z}_{n0} = \widetilde{\mathfrak{z}}_{n0} = 1$.

В дальнейшем существенную роль будут играть отношения правдоподобия

$$z_{nk} = \frac{\widetilde{\mathfrak{z}}_{nk}}{\mathfrak{z}_{nk}} \tag{1.4}$$

и построенные по ним величины

$$\alpha_{nk} = z_{nk} \cdot z^{\ominus}_{n,\,k-1}, \quad k \geqslant 1. \tag{1.5}$$

Заметим, что в (1.4) не возникает неопределенности вида $\infty/\infty$; как обычно, $a/0 = \infty$ для $a > 0$, а в случае неопределенности $0/0$ полагаем $z_{nk}$ равным любому числу, например, для определенности равным нулю, что несущественно, поскольку

$$\mathbf{Q}^n(\tilde{\mathfrak{z}}_{nk}=0, \quad \mathfrak{z}_{nk}=0)\leqslant\frac{1}{2}[\tilde{\mathbf{P}}^n(\tilde{\mathfrak{z}}_{nk}=0)+\mathbf{P}^n(\mathfrak{z}_{nk}=0)]=0.$$

Таким образом, $z_{nk}=\tilde{\mathfrak{z}}_{nk}\cdot\mathfrak{z}^{\oplus}_{nk}=\tilde{\mathfrak{z}}_{nk}\cdot\mathfrak{z}^{\ominus}_{nk}$ ($\mathbf{Q}^n$-почти наверное (п. н.)). Точно так же в (1.5) неопределенность типа $0\cdot\infty$ или $\infty\cdot 0$ возникает лишь с $\mathbf{Q}^n$-вероятностью, равной нулю, поскольку состояния 0 и $\infty$ являются для $(z_{nk})_{k\geqslant 1}$ поглощающими; см. свойство 3° в § 2.

4. Следующая теорема является одним из основных результатов настоящей статьи [1]).

Теорема 1. I. *Для того чтобы* $(\tilde{\mathbf{P}}^n)\vartriangleleft(\mathbf{P}^n)$, *необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих двух условий:*

(α) $$\lim_N \overline{\lim_n}\,\tilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k \alpha_{nk}\geqslant N)=0,$$

(β) $$\lim_N \overline{\lim_n}\,\tilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}_{\mathbf{Q}^n}[(\sqrt{\tilde{\beta}_{nk}}-\sqrt{\beta_{nk}})^2|\mathscr{F}^n_{k-1}]\geqslant N\Big)=0,$$

*где* $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}^n}$ *— усреднение по мере* $\mathbf{Q}^n$.

II. *При выполнении* (α) *условие* (β) *равносильно любому из условий*

(β*) $$\lim_N \overline{\lim_n}\,\tilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}I(\alpha_{n,k-1}<\infty)[1-\mathbf{E}^n(\sqrt{\alpha_{nk}}|\mathscr{F}^n_{k-1})]\geqslant N\Big)=0$$

или

(β**) $$\lim_N \overline{\lim_n}\,\tilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}^n[(1-\sqrt{\alpha_{nk}})^2|\mathscr{F}^n_{k-1}]\geqslant N\Big)=0,$$

*где* $\mathbf{E}^n$ *— усреднение по мере* $\mathbf{P}^n$.

Следствие 1. *Пусть* $\mathbf{P}^n=\mu^n_1\times\mu^n_2\times\ldots$, $\tilde{\mathbf{P}}^n=\tilde{\mu}^n_1\times\tilde{\mu}^n_2\times\ldots$ *— меры, являющиеся прямым произведением вероятностных мер на* $(\Omega^n,\mathscr{F}^n)$, *где*

$$\Omega^n=\Omega^n_1\times\Omega^n_2\times\ldots,\quad \mathscr{F}^n=\mathscr{F}^n_1\otimes\mathscr{F}^n_2\otimes\ldots$$

*Тогда в условии* (β) *условные математические ожидания совпадают с безусловными,*

$$\beta_{nk}=\frac{1}{2}\frac{d\mu^n_k}{d(\mu^n_k+\tilde{\mu}^n_k)},\quad \tilde{\beta}_{nk}=\frac{1}{2}\frac{d\tilde{\mu}^n_k}{d(\mu^n_k+\tilde{\mu}^n_k)}$$

*и*

$$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}^n}(\sqrt{\tilde{\beta}_{nk}}-\sqrt{\beta_{nk}})^2=\int(\sqrt{\tilde{\beta}_{nk}}-\sqrt{\beta_{nk}})^2\,d\Big(\frac{\mu^n_k+\tilde{\mu}^n_k}{2}\Big)$$

*есть в точности квадрат расстояния Хеллингера* $H(\tilde{\mu}^n_k,\mu^n_k)$ *между мерами* $\tilde{\mu}^n_k$ *и* $\mu^n_k$ *(подробнее см. далее п. 5 в § 2).*

Из теоремы 1 в качестве частного случая получаем следующий результат, ранее установленный Остерхофом и Ван Цветом [6]: для контигуальности $(\tilde{\mathbf{P}}^n)\vartriangleleft(\mathbf{P}^n)$ семейства $(\tilde{\mathbf{P}}^n)$ по отношению к $(\mathbf{P}^n)$, где каждая из мер является

[1]) Далее $\sup_m$ означает $\sup_{1\leqslant m<\infty}$ и $\lim_m=\lim_{m\to\infty}$.

прямым произведением мер, необходимо и достаточно, чтобы

$$(\alpha)\qquad \lim_N \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n\left(\sup_k \frac{\widetilde{\beta}_{nk}}{\beta_{nk}} \geqslant N\right) = 0,$$

$$(\beta)\qquad \overline{\lim_n} \sum_{k=1}^{\infty} H^2(\widetilde{\mu}_k^n,\ \mu_k^n) < \infty.$$

Следствие 2. *Пусть* $\mathbf{P}^n = \mu_1^n \times \ldots \times \mu_n^n$, $\widetilde{\mathbf{P}}^n = \widetilde{\mu}_1^n \times \ldots \times \widetilde{\mu}_n^n$ — *меры, являющиеся прямым произведением вероятностных мер на* $(\Omega^n, \mathscr{F}^n)$, *где* $\Omega^n = R^n$, $\mathscr{F}^n = \mathscr{B}(R^n)$ *и* $\mu_i^n = \mu^n$, $\widetilde{\mu}_i^n = \widetilde{\mu}^n$. *Предположим для простоты, что* $\mu^n$ *и* $\widetilde{\mu}^n$ *имеют плотности* $p^n(x)$ *и* $\widetilde{p}^n(x)$ *по мере Лебега. Тогда в рассматриваемой «треугольной схеме серий, отвечающих случаю независимых одинаково распределенных случайных величин» для* $(\widetilde{\mathbf{P}}^n) \lhd (\mathbf{P}^n)$, *необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия*

$$\lim_N \overline{\lim_n}\, n\widetilde{\mu}^n\left\{x : \frac{\widetilde{p}^n(x)}{p^n(x)} \geqslant N\right\} = 0$$

*и*

$$\overline{\lim_n}\, n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{\widetilde{p}^n(x)} - \sqrt{p^n(x)}\right)^2 dx < \infty.$$

Следствие 3. *Пусть при каждом* $n \geqslant 1$ *меры* $\widetilde{\mathbf{P}}^n$ *локально абсолютно непрерывны относительно мер* $\widetilde{\mathbf{P}}^n$ *(обозначение:* $\widetilde{\mathbf{P}}^n \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}^n$), *т. е.*

$$\widetilde{\mathbf{P}}_k^n \ll \mathbf{P}_k^n, \qquad k \geqslant 1.$$

*В этом предположении* $\widetilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{n,k-1} < \infty) = 1$, *и тогда из теоремы* 1 *в качестве частного случая получаем результаты работ Иглсона и Гунди* [9] *и Иглсона и Мемена* [10] *о том, что условие* $(\alpha)$ *и условие*

$$(1.6)\qquad \lim_N \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^n(1 - \sqrt{\alpha_{nk}}\,|\mathscr{F}_{k-1}^n) \geqslant N\right) = 0$$

*являются достаточными для* $(\widetilde{\mathbf{P}}^n) \lhd (\mathbf{P}^n)$.

Следствие 4. *В замечании* 2 *отмечалось, что в том случае, когда на измеримом пространстве* $(\Omega, \mathscr{F})$ *с выделенным семейством* $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_k)_{k\geqslant 1}$, $\mathscr{F} = \sigma(\bigcup \mathscr{F}_k)$ *заданы две меры* $\mathbf{P}$ *и* $\widetilde{\mathbf{P}}$ *с сужениями* $\mathbf{P}_k = \mathbf{P} \mid \mathscr{F}_k$ *и* $\widetilde{\mathbf{P}}_k = \widetilde{\mathbf{P}} \mid \mathscr{F}_k$, *свойство абсолютной непрерывности* $\widetilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{P}$ *равносильно свойству контигуальности* $(\widetilde{\mathbf{P}}_k) \lhd (\mathbf{P}_k)$.

Предположим, что $\widetilde{\mathbf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}$. В этом случае условие $(\alpha)$ имеет вид

$$\widetilde{\mathbf{P}}(\sup_k \alpha_k < \infty) = 1$$

с $\alpha_k = z_k \cdot z_{k-1}^{\ominus}$, $z_k = d\widetilde{\mathbf{P}}_k/d\mathbf{P}_k$ и автоматически выполняется (см. далее свойство 5° в § 2).

Поэтому из теоремы 1 вытекает как частный случай следующий результат работы Кабанова, Липцера, Ширяева [11]: *если* $\widetilde{\mathbf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}$, *то*

$$(1.7)\qquad \widetilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{P} \Leftrightarrow \widetilde{\mathbf{P}}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}(1 - \sqrt{\alpha_k}\,|\mathscr{F}_{k-1}) < \infty\right) = 1.$$

**5.** В следующих двух теоремах даются условия полной асимптотической разделимости семейств мер $(\widetilde{\mathbf{P}}^n)$ и $(\mathbf{P}^n)$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие*

$$(\gamma)\qquad \overline{\lim_n}\,\widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\,[1-\mathbf{E}^n(\sqrt{\alpha_{kn}}|\mathcal{F}^n_{k-1})]\geqslant N\Big)=1\quad \forall N>0.$$

*Тогда* $(\widetilde{\mathbf{P}}^n)\triangle(\mathbf{P}^n)$.

Следствие 5. *Если* $\widetilde{\mathbf{P}}^n\overset{\mathrm{loc}}{\ll}\mathbf{P}^n$, $n\geqslant 1$, *то* $\widetilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{n,k-1}<\infty)=1$ *и из теоремы* 2 *следует результат работ* [9], [10]:

$$(1.8)\qquad \overline{\lim_n}\,\widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}[1-\mathbf{E}^n(\sqrt{\alpha_{nk}}|\mathcal{F}^n_{k-1})]\geqslant N\Big)=1\quad \forall N>0\Rightarrow(\widetilde{\mathbf{P}}^n)\triangle(\mathbf{P}^n).$$

В теореме 3 приводятся условия, обеспечивающие справедливость импликации, обратной к (1.8).

Теорема 3. *Пусть* $\widetilde{\mathbf{P}}^n\overset{\mathrm{loc}}{\ll}\mathbf{P}^n$, $n\geqslant 1$, *и выполнены условия*

$$(\alpha)\qquad \lim_N\overline{\lim_n}\,\widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k\alpha_{nk}\geqslant N)=0,$$

$$(\delta)\qquad \lim_N\overline{\lim_n}\,\widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\inf_k\alpha_{nk}\leqslant\frac{1}{N}\Big)=0.$$

*Тогда условие*

$$(\rho)\qquad \overline{\lim_n}\,\widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}[1-\mathbf{E}^n(\sqrt{\alpha_{nk}}|\mathcal{F}^n_{k-1})]\geqslant N\Big)=1\quad \forall N>0$$

*является необходимым и достаточным для того, чтобы* $(\widetilde{\mathbf{P}}^n)\triangle(\mathbf{P}^n)$.

Из теорем 1 и 3 непосредственно вытекают следующие полезные следствия.

Следствие 6. *Пусть* $\widetilde{\mathbf{P}}^n\overset{\mathrm{loc}}{\ll}\mathbf{P}^n$, $n\geqslant 1$, *и выполнены условия* $(\alpha)$, $(\delta)$. *Тогда*

$$(1.9)\qquad \begin{cases}(\widetilde{\mathbf{P}}^n)\lhd(\mathbf{P}^n)\Longleftrightarrow \lim\limits_N\overline{\lim\limits_n}\,\widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}^n(1-\sqrt{\alpha_{nk}}|\mathcal{F}^n_{k-1})\geqslant N\Big)=0,\\[2ex] (\widetilde{\mathbf{P}}^n)\triangle(\mathbf{P}^n)\Longleftrightarrow \overline{\lim\limits_n}\,\widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}^n(1-\sqrt{\alpha_{nk}}|\mathcal{F}^n_{k-1})\geqslant N\Big)=1\,\forall N>0.\end{cases}$$

В частности, для случая, рассмотренного в замечании 2, при $\widetilde{\mathbf{P}}\overset{\mathrm{loc}}{\ll}\mathbf{P}$, условия $(\alpha)$ и $(\delta)$ имеют соответственно вид

$$\widetilde{\mathbf{P}}(\sup_k\alpha_k<\infty)=1,\quad \widetilde{\mathbf{P}}(\inf_k\alpha_k=0)=0$$

и следуют из условий $(\beta^{**})$ и $(\rho)$. Поэтому из (1.9) получаем следующий результат работы [11]: *если* $\mathbf{P}\overset{\mathrm{loc}}{\ll}\mathbf{P}$, *то*

$$(1.10)\qquad \begin{cases}\widetilde{\mathbf{P}}\overset{\mathrm{loc}}{\ll}\mathbf{P}\Longleftrightarrow\widetilde{\mathbf{P}}\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}(1-\sqrt{\alpha_k}|\mathcal{F}_{k-1})<\infty\Big)=1,\\[2ex] \widetilde{\mathbf{P}}\perp\mathbf{P}\Longleftrightarrow\widetilde{\mathbf{P}}\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}(1-\sqrt{\alpha_k}|\mathcal{F}_{k-1})=\infty\Big)=1.\end{cases}$$

Следствие 7. *Предположим, что рассматривается ситуация (прямого произведения мер), изложенная в следствии* 1, *и пусть выполнены* *следующие три условия*:

$$\widetilde{\mathbf{P}}^n \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathbf{P}^n, \qquad n \geqslant 1,$$

$$(1.11) \qquad \begin{cases} (\alpha) & \lim\limits_{N} \varlimsup\limits_{n} \widetilde{\mathbf{P}}^n \left( \sup\limits_{k} \dfrac{\widetilde{\beta}_{nk}}{\beta_{nk}} \geqslant N \right) = 0, \\ (\delta) & \lim\limits_{N} \varlimsup\limits_{n} \widetilde{\mathbf{P}}^n \left( \inf\limits_{k} \dfrac{\widetilde{\beta}_{nk}}{\beta_{nk}} \leqslant \dfrac{1}{N} \right) = 0. \end{cases}$$

*Тогда*

$$(1.12) \qquad \begin{cases} (\widetilde{\mathbf{P}}^n) \lhd (\mathbf{P}^n) \Longleftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} H^2 (\widetilde{\mu}_k^n, \mu_k^n) < \infty, \\ (\widetilde{\mathbf{P}}^n) \vartriangle (\mathbf{P}^n) \Longleftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} H^2 (\widetilde{\mu}_k^n, \mu_k^n) = \infty. \end{cases}$$

Тем самым в предположениях (1.11) имеет место альтернатива:

$$\text{либо } (\widetilde{\mathbf{P}}^n) \lhd (\mathbf{P}^n), \text{ либо } (\widetilde{\mathbf{P}}^n) \vartriangle (\mathbf{P}^n).$$

(Ср. с альтернативой Какутани; [11].)

**6.** Поясним вкратце идею доказательства теорем 1—3, для чего полезно следующее известное

Определение 3. Семейство $(\xi^n)_{n\geqslant 1}$ случайных величин $\xi^n$, заданных на $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathbf{P}^n)$, $n \geqslant 1$, называется *асимптотически равномерно плотным относительно семейства мер* $(\mathbf{P}^n)_{n\geqslant 1}$ (обозначение: $(\xi^n, \mathbf{P}^n)$-*плотно*), если

$$(1.13) \qquad \lim_{N} \varlimsup_{n} \mathbf{P}^n (|\xi^n| \geqslant N) = 0.$$

Согласно лемме 9 (см. ниже)

$$(1.14) \qquad (\widetilde{\mathbf{P}}^n) \lhd (\mathbf{P}^n) \Longleftrightarrow (\sup_{k} z_{nk}, \widetilde{\mathbf{P}}^n)\text{-плотно}.$$

Таким образом, доказательство теоремы 1, данное в § 5, сводится к проверке того, что асимптотическая равномерная плотность $(\sup\limits_{k} z_{nk})$ относительно семейства $(\widetilde{\mathbf{P}}^n)$ равносильна условиям $(\alpha)$ и $(\beta)$, также выраженным в терминах асимптотической равномерной плотности соответствующих семейств. Далее, согласно лемме 10

$$(1.15) \qquad (\widetilde{\mathbf{P}}^n) \vartriangle (\mathbf{P}^n) \Longleftrightarrow \varlimsup_{n} \widetilde{\mathbf{P}}^n (\sup_{n} z_{nk} \geqslant N) = 1 \quad \forall N > 0.$$

Таким образом, доказательство теоремы 2 сводится к установлению того, что

$$(\gamma) \Rightarrow \varlimsup_{n} \widetilde{\mathbf{P}}^n (\sup_{k} z_{nk} \geqslant N) = 1 \quad \forall N > 0.$$

Доказательство этой теоремы и теоремы 3 дается в § 6.

В § 2 приводится разложение Лебега и ряд полезных утверждений, следующих из него. В частности, устанавливается формула преобразования условного математического ожидания при неабсолютно непрерывной замене меры (лемма 3). В § 3 даются (в предсказуемых терминах) условия асимптотической равномерной плотности семейств субмартингалов. В § 4 приведен ряд характеризаций контигуальности и полной асимптотической разделимости.

## § 2. Разложение Лебега

1. Пусть $(\Omega, \mathscr{F})$ — измеримое пространство, $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_k)_{k\geqslant 1}$ — неубывающее семейство σ-алгебр, $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\infty \equiv \sigma(\bigcup_k \mathscr{F}_k)$; $\mathbf{P}$ и $\widetilde{\mathbf{P}}$ — вероятностные меры и $\mathbf{P}_k = \mathbf{P} \mid \mathscr{F}_k$, $\widetilde{\mathbf{P}}_k = \widetilde{\mathbf{P}} \mid \mathscr{F}_k$ — их сужения на $\mathscr{F}_k$.

Обозначим $\mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\mathbf{P} + \widetilde{\mathbf{P}})$, $\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q} \mid \mathscr{F}_k$,

$$\mathfrak{z}_k = \frac{d\mathbf{P}_k}{d\mathbf{Q}_k}, \quad \widetilde{\mathfrak{z}}_k = \frac{d\widetilde{\mathbf{P}}_k}{d\mathbf{Q}_k}$$

— конечные варианты соответствующих производных Радона — Никодима, и пусть

$$z_k = \frac{\widetilde{\mathfrak{z}}_k}{\mathfrak{z}_k}$$

— отношения правдоподобия (в случае неопределенности 0/0 полагаем $z_k = 0$; отметим, что $\mathbf{Q}(\widetilde{\mathfrak{z}}_k = 0, \ \mathfrak{z}_k = 0) = 0$).

Укажем ряд простейших свойств последовательностей $(\mathfrak{z}_k)$, $(\widetilde{\mathfrak{z}}_k)$, $(z_k)$, $k \geqslant 1$.

1°. Относительно меры $\mathbf{Q}$ последовательности $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_k, \mathscr{F}_k)$ и $\widetilde{\mathfrak{z}} = (\widetilde{\mathfrak{z}}_k, \mathscr{F}_k)$ являются неотрицательными равномерно интегрируемыми мартингалами. Отсюда вытекает, что $\mathbf{Q}$-, $\widetilde{\mathbf{P}}$- и $\mathbf{P}$-п. н. существуют пределы

$$\mathfrak{z}_\infty \equiv \lim \mathfrak{z}_k, \quad \widetilde{\mathfrak{z}}_\infty \equiv \lim \widetilde{\mathfrak{z}}_k, \quad \sup_k \mathfrak{z}_k + \sup_k \widetilde{\mathfrak{z}}_k < \infty$$

и

$$\mathfrak{z}_\infty = \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}, \quad \widetilde{\mathfrak{z}}_\infty = \frac{d\widetilde{\mathbf{P}}}{d\mathbf{Q}}.$$

2°. Справедливы равенства $\mathbf{P}(\inf_k \mathfrak{z}_k > 0) = 1$, $\widetilde{\mathbf{P}}(\inf_k \widetilde{\mathfrak{z}}_k > 0) = 1$. Действительно, пусть $T = \inf\{k \geqslant 0\colon \ \mathfrak{z}_k = 0\}$, полагая $T = \infty$, если $\mathfrak{z}_k > 0$ для всех $k \geqslant 0$. Тогда

$$\mathbf{P}(\inf_k \mathfrak{z}_k = 0) = \int\limits_{\{\inf_k \mathfrak{z}_k = 0\}} \mathfrak{z}_\infty \, d\mathbf{Q} =$$

$$= \int\limits_{\{\mathfrak{z}_T = 0,\ T < \infty\}} \mathfrak{z}_\infty \, d\mathbf{Q} + \int\limits_{\{\mathfrak{z}_\infty = 0,\ T = \infty\}} \mathfrak{z}_\infty \, d\mathbf{Q} = \int\limits_{\{\mathfrak{z}_T = 0,\ T < \infty\}} \mathfrak{z}_T \, d\mathbf{Q} = 0.$$

3°. Поскольку значение 0 является поглощающим ($\mathbf{Q}$-п. н.) для мартингалов $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_k, \mathscr{F}_k)$ и $\widetilde{\mathfrak{z}} = (\widetilde{\mathfrak{z}}_k, \mathscr{F}_k)$, то значения 0 и $\infty$ будут поглощающими состояниями ($\mathbf{Q}$-, $\mathbf{P}$- и $\widetilde{\mathbf{P}}$-п. н.) для последовательности $(z_k)_{k\geqslant 1}$.

4°. $\mathbf{Q}$-, $\mathbf{P}$- и $\mathbf{P}$-п. н. существует предел

$$z_\infty \equiv \lim z_k.$$

5°. Справедливы следующие соотношения:

$$\mathbf{P}(\sup_k z_k < \infty) = 1, \quad \widetilde{\mathbf{P}}(\inf_k z_k > 0) = 1,$$

и если $\widetilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{P}$, то

$$\widetilde{\mathbf{P}}(\sup_k z_k < \infty) = 1.$$

Действительно,

$$\widetilde{\mathbf{P}}(\sup_k z_k < \infty) \geqslant \widetilde{\mathbf{P}}\left(\frac{\sup \widetilde{\mathfrak{z}}_k}{\inf \mathfrak{z}_k} < \infty\right) \geqslant \widetilde{\mathbf{P}}(\sup_k \widetilde{\mathfrak{z}}_k < \infty, \inf_k \mathfrak{z}_k > 0) = 1$$

и

$$\widetilde{\mathbf{P}}(\inf_k z_k > 0) = \widetilde{\mathbf{P}}(\inf_k \widetilde{\mathfrak{z}}_k > 0) = 1.$$

**2.** Лемма 1 (разложение Лебега). *Пусть $T$ — марковский момент (относительно $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_k)_{k \geqslant 1}$). Тогда для любого множества $A \in \mathscr{F}_T$*

$$\widetilde{\mathbf{P}}(A) = \int_A z_T \, d\mathbf{P} + \widetilde{\mathbf{P}}(A \cap \{z_T = \infty\}). \tag{2.1}$$

Доказательство (ср. с [11]). Поскольку

$$1 = \mathfrak{z}_T^{\oplus} \cdot \mathfrak{z}_T + (1 - \mathfrak{z}_T^{\oplus} \mathfrak{z}_T),$$

то для $A \in \mathscr{F}_T$

$$\widetilde{\mathbf{P}}(A) = \int_A \widetilde{\mathfrak{z}}_\infty \, d\mathbf{Q} = \int_A \widetilde{\mathfrak{z}}_T \, d\mathbf{Q} = \int_A \widetilde{\mathfrak{z}}_T \, [\mathfrak{z}_T^{\oplus} \mathfrak{z}_T + (1 - \mathfrak{z}_T^{\oplus} \mathfrak{z}_T)] \, d\mathbf{Q} = \tag{2.2}$$
$$= \int_A \widetilde{\mathfrak{z}}_T \mathfrak{z}_T^{\oplus} \mathfrak{z}_\infty \, d\mathbf{Q} + \int_A \widetilde{\mathfrak{z}}_T \, (1 - \mathfrak{z}_T^{\oplus} \mathfrak{z}_T) \, d\mathbf{Q} = \int_A \widetilde{\mathfrak{z}}_T \mathfrak{z}_T^{\oplus} \, d\mathbf{P} + \int_A (1 - \mathfrak{z}_T^{\oplus} \mathfrak{z}_T) \, d\widetilde{\mathbf{P}}.$$

Здесь (свойство 2°)

$$\widetilde{\mathfrak{z}}_T \mathfrak{z}_T^{\oplus} = \frac{\widetilde{\mathfrak{z}}_T}{\mathfrak{z}_T} \ (\mathbf{P}\text{-п.н.}) \tag{2.3}$$

и

$$\int_A (1 - \mathfrak{z}_T^{\oplus} \mathfrak{z}_T) \, d\widetilde{\mathbf{P}} = \widetilde{\mathbf{P}}(A, \mathfrak{z}_T = 0) = \widetilde{\mathbf{P}}\left(A, \frac{\widetilde{\mathfrak{z}}_T}{\mathfrak{z}_T} = \infty\right), \tag{2.4}$$

поскольку $\widetilde{\mathbf{P}}(\inf_k \widetilde{\mathfrak{z}}_k > 0) = 1$ (свойство 2°).

Из (2.2) — (2.4) получаем требуемое разложение (2.1).

Следствие 1. *Пусть $\eta$ — $\mathscr{F}_T$-измеримая неотрицательная случайная величина с $\widetilde{\mathbf{E}}\eta < \infty$ ($\widetilde{\mathbf{E}}$ — усреднение по мере $\widetilde{\mathbf{P}}$). Тогда*

$$\widetilde{\mathbf{E}}\eta = \mathbf{E}\eta z_T + \widetilde{\mathbf{E}}\eta I(z_T = \infty). \tag{2.5}$$

Следствие 2. *Пусть $\eta$ — $\mathscr{F}_T$-измеримая неотрицательная случайная величина такая, что $\eta = 0$ ($\mathbf{P}$-п. н.). Тогда*

$$\eta I(z_T < \infty) = 0 \quad (\widetilde{\mathbf{P}}\text{-п. н.}). \tag{2.6}$$

**3.** Лемма 2. *Для всякого $b > 0$ справедливы неравенства*

$$\widetilde{\mathbf{P}}(\inf_k z_k \leqslant b) \leqslant b, \quad \mathbf{P}(\sup_k z_k \geqslant b) \leqslant \frac{1}{b}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Пусть $T = \inf\{k\colon z_k \leqslant b\}$, считая $T = \infty$, если $z_k > b$ при всех $k$. Тогда $\{\inf z_k \leqslant b\} = \{z_T \leqslant b\}$. В силу разложения (2.1)

$$\widetilde{\mathbf{P}}(\inf z_k \leqslant b) = \int\limits_{\{z_T \leqslant b\}} z_T\, d\mathbf{P} + \widetilde{\mathbf{P}}(z_T \leqslant b,\ z_T = \infty) \leqslant b.$$

Пусть теперь $S = \inf\{k\colon z_k \geqslant b\}$ с $S = \infty$, если $z_k < b$ при всех $k$. Тогда $\{\sup z_k \geqslant b\} = \{z_S \geqslant b\}$ и опять-таки согласно (2.1)

$$1 \geqslant \widetilde{\mathbf{P}}(\sup z_k \geqslant b) = \widetilde{\mathbf{P}}(z_S \geqslant b) =$$

$$= \int\limits_{z_S \geqslant b,} z_S\, \widetilde{d}\mathbf{P} + \mathbf{P}(z_S \geqslant b,\ z_S = \infty) \geqslant b\mathbf{P},\ (z_S \geqslant b) = b\mathbf{P}(\sup z_k \geqslant b).$$

4. Обозначим $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = z_1$, $\alpha_k = z_k \cdot z_{k-1}^{\ominus}$, $k \geqslant 2$. Тогда в силу свойства 3° из п. 1

$$z_k = \prod_{j=1}^{k} \alpha_j. \tag{2.8}$$

Следующая лемма дает важную формулу для вычисления условных математических ожиданий при неабсолютно непрерывной замене меры.

Лемма 3. *Пусть $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ и $\eta$ — $\mathscr{F}_k$-измеримая неотрицательная $\widetilde{\mathbf{P}}$-интегрируемая случайная величина, $k \geqslant 1$. Тогда ($\widetilde{\mathbf{P}}$-п. н.)*

$$\widetilde{\mathbf{E}}(\eta|\mathscr{F}_{k-1}) = I(\alpha_{k-1} < \infty)\,\mathbf{E}(\eta\alpha_k|\mathscr{F}_{k-1}) + \widetilde{\mathbf{E}}(\eta I(\alpha_k = \infty)|\mathscr{F}_{k-1}). \tag{2.9}$$

Доказательство. Заметим, что при $k = 1$ (2.9) превращается в соотношение (2.5).

Пусть теперь $k \geqslant 2$. Равенство (2.9) достаточно доказать лишь для неотрицательных ограниченных случайных величин $\eta$. В этом предположении обозначим правую часть в (2.9) через $\xi$. Тогда для справедливости (2.9) надо установить, что для всякого множества $A \in \mathscr{F}_{k-1}$

$$\widetilde{\mathbf{E}}\eta I(A) = \widetilde{\mathbf{E}}\xi I(A). \tag{2.10}$$

Из (2.8) и свойства 3° (п.1) следует, что ($\widetilde{\mathbf{P}}$-п. н.) для всякого $k \geqslant 1$

$$\{\alpha_k < \infty\} = \{z_k < \infty\}. \tag{2.11}$$

Поэтому

$$\widetilde{\mathbf{E}}\xi I(A) = \widetilde{\mathbf{E}} I(z_{k-1} < \infty)\,\mathbf{E}(\eta\alpha_k|\mathscr{F}_{k-1})\, I(A) + \widetilde{\mathbf{E}}\eta I(z_k = \infty)\, I(A). \tag{2.12}$$

В силу (2.5)

$$\widetilde{\mathbf{E}} I(z_{k-1} < \infty)\,\mathbf{E}(\eta\alpha_k|\mathscr{F}_{k-1})\, I(A) = \mathbf{E}(I(z_{k-1} < \infty)\,\mathbf{E}(\eta\alpha_k|\mathscr{F}_{k-1})\, I(A)\, z_{k-1}) +$$

$$+ \widetilde{\mathbf{E}}(I(z_{k-1} < \infty)\,\mathbf{E}(\eta\alpha_k|\mathscr{F}_{k-1}) \cdot I(A) \cdot I(z_{k-1} = \infty)) =$$

$$= \mathbf{E}(I(z_{k-1} < \infty)\,\eta\alpha_k I(A)\, z_{k-1}) = \mathbf{E}(I(z_{k-1} < \infty)\,\eta z_k z_{k-1}^{\ominus} I(A)\, z_{k-1}).$$

Опираясь на свойства 3° и 5°, находим, что ($\mathbf{P}$-п. н.)

$$I(z_{k-1} < \infty)\, z_k z_{k-1}^{\ominus} z_{k-1} = I(z_{k-1} < \infty)\, z_k z_{k-1}^{\oplus} z_{k-1} = z_k.$$

Поэтому

$$\widetilde{\mathbf{E}}(I(z_{k-1} < \infty)\,\mathbf{E}(\eta\alpha_k|\mathscr{F}_{k-1})\, I(A)) = \mathbf{E}\eta z_k I(A),$$

и значит,

$$\widetilde{\mathbf{E}}\xi I(A) = \mathbf{E}\eta z_k I(A) + \widetilde{\mathbf{E}}\eta I(z_k = \infty)\, I(A). \tag{2.13}$$

Согласно (2.5)

$$\mathbf{E}\eta z_k I(A) + \widetilde{\mathbf{E}}\eta I(z_k = \infty) I(A) = \widetilde{\mathbf{E}}\eta I(A),$$

что вместе с (2.13) доказывает требуемое равенство (2.10).

Следствие 1. *Пусть* $\widetilde{\mathbf{P}} \overset{\text{loc}}{\ll} \mathbf{P}$, *т. е.* $\widetilde{\mathbf{P}}_k \ll \mathbf{P}_k$, $k \geqslant 1$. *Тогда* $\widetilde{\mathbf{P}}(\alpha_k < \infty) = \widetilde{\mathbf{P}}(z_k < \infty) = 1$ *и* ($\widetilde{\mathbf{P}}$-*п. н.*)

$$\widetilde{\mathbf{E}}(\eta | \mathscr{F}_{k-1}) = \mathbf{E}(\eta\alpha_k | \mathscr{F}_{k-1}), \quad k \geqslant 1. \tag{2.14}$$

(Ср. с леммой 6.6 в [16].)

Следствие 2. *Положим* (*ср. с* (1.3)) $\beta_0 = \widetilde{\beta}_0 = 1$, $\beta_k = \mathfrak{z}_k \cdot \mathfrak{z}_{k-1}^{\ominus}$, $\widetilde{\beta}_k = \widetilde{\mathfrak{z}}_k \cdot \widetilde{\mathfrak{z}}_{k-1}^{\ominus}$. *Значение* 0 *является* ($\mathbf{Q}$-, $\mathbf{P}$-, $\widetilde{\mathbf{P}}$-*п. н.*) *поглощающим состоянием для* $(\mathfrak{z}_k)$ *и* $(\widetilde{\mathfrak{z}}_k)$ *и*

$$\mathfrak{z}_k = \prod_{j=1}^{k} \beta_j, \quad \widetilde{\mathfrak{z}}_k = \prod_{j=1}^{k} \widetilde{\beta}_j. \tag{2.15}$$

*Из* (2.14) *следует, что имеют место формулы*

$$\mathbf{E}(\eta | \mathscr{F}_{k-1}) = \mathbf{E}_Q(\eta\beta_k | \mathscr{F}_{k-1}) \quad (\mathbf{P}\text{-п. н.}) \tag{2.16}$$

*и*

$$\widetilde{\mathbf{E}}(\eta | \mathscr{F}_{k-1}) = \mathbf{E}_Q(\eta\widetilde{\beta}_k | \mathscr{F}_{k-1}) \quad (\widetilde{\mathbf{P}}\text{-п. н.}). \tag{2.17}$$

5. Пусть $\mu$ и $\widetilde{\mu}$ — две вероятностные меры, заданные на измеримом пространстве.

Расстоянием Хеллингера (между мерами $\mu$ и $\widetilde{\mu}$) называется величина

$$H(\mu, \widetilde{\mu}) \equiv [\mathbf{E}_\nu (\sqrt{\beta} - \sqrt{\widetilde{\beta}})^2]^{1/2}, \tag{2.18}$$

где $\nu$ — некоторая мера такая, что $\mu + \widetilde{\mu} \ll \nu$, $\beta = d\mu/d\nu$, $\widetilde{\beta} = d\widetilde{\mu}/d\nu$ и $\mathbf{E}_\nu$ — усреднение по мере $\nu$. Значение $H(\mu, \widetilde{\mu})$ не зависит от выбора меры $\nu$, доминирующей меру $\mu + \widetilde{\mu}$, и ясно, что

$$H^2(\mu, \widetilde{\mu}) = 2\left(1 - \int \sqrt{\beta\widetilde{\beta}}\, d\nu\right). \tag{2.19}$$

Пусть теперь $(\Omega, \mathscr{F})$ — измеримое пространство, $\mathbf{P}$ и $\widetilde{\mathbf{P}}$ — две вероятностные меры. В том случае, когда эти меры являются прямым произведением мер,

$$\mathbf{P} = \mu_1 \times \mu_2 \times \ldots, \quad \widetilde{\mathbf{P}} = \widetilde{\mu}_1 \times \widetilde{\mu}_2 \times \ldots, \tag{2.20}$$

рассмотрение расстояний Хеллингера $H(\mu_k, \widetilde{\mu}_k)$ между маргинальными мерами $\mu_k$ и $\widetilde{\mu}_k$ оказывается полезным при решении разнообразных вопросов, касающихся соотношений между мерами $\mathbf{P}$ и $\widetilde{\mathbf{P}}$ (см., например, [6], [15]).

В том же случае, когда $\mathbf{P}$ и $\widetilde{\mathbf{P}}$ — вероятностные меры на $(\Omega, \mathscr{F})$ (с выделенным на нем неубывающим семейством $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_n)_{n \geqslant 0}$, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathscr{F} = \sigma(\bigcup \mathscr{F}_n)$), не обязательно являющиеся прямым произведением мер, соответствующую роль играют так называемые условные расстояния Хеллингера

$$H_k \equiv \mathbf{E}_Q [(\sqrt{\beta_k} - \sqrt{\widetilde{\beta}_k})^2 | \mathscr{F}_{k-1}]^{1/2}, \tag{2.21}$$

где $\beta_k$ и $\widetilde{\beta}_k$ определены в следствии 2 (п. 4), $\mathbf{Q}$ — некоторая мера, доминирующая меру $\mathbf{P}+\widetilde{\mathbf{P}}$ (далее полагаем $\mathbf{Q}=\frac{1}{2}(\mathbf{P}+\widetilde{\mathbf{P}})$), $k\geqslant 1$.

Следующая лемма будет играть ключевую роль при доказательстве утверждения II теоремы 1.

Лемма 4. *Для каждого* $k\geqslant 1$ *имеют место* ($\widetilde{\mathbf{P}}$*-п. н.*) *следующие равенства*:

$$\frac{1}{2}I(\alpha_{k-1}<\infty)H_k^2=I(\alpha_{k-1}<\infty)\left(1-\mathbf{E}\left(\sqrt{\alpha_k}\,|\,\mathscr{F}_{k-1}\right)\right). \tag{2.22}$$

Доказательство. Пусть $k=1$. В этом случае $\alpha_0=1$ и $\mathbf{Q}$-п. н.

$$H_1^2=\mathbf{E}_Q\left(\sqrt{\mathfrak{z}_1}-\sqrt{\widetilde{\mathfrak{z}}_1}\right)^2=2\quad\left(1-\mathbf{E}_Q\sqrt{\mathfrak{z}_1\widetilde{\mathfrak{z}}_1}\right).$$

С другой стороны, $\alpha_1=z_1$, $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\ \Omega\}$ и

$$\mathbf{E}\left(\sqrt{\alpha_1}\,|\,\mathscr{F}_0\right)=\mathbf{E}\sqrt{z_1}=\mathbf{E}_Q\left(\frac{\widetilde{\mathfrak{z}}_1}{\mathfrak{z}_1}\right)^{1/2}\cdot\mathfrak{z}_1=\mathbf{E}_Q\sqrt{\mathfrak{z}_1\widetilde{\mathfrak{z}}_1}\,.$$

Поэтому в случае $k=1$ равенство (2.22) следует очевидным образом.

Пусть теперь $k>1$. Поскольку $\{\alpha_{k-1}<\infty\}=\{z_{k-1}<\infty\}$ ($\widetilde{\mathbf{P}}$-п. н.), то

$$\{\alpha_{k-1}<\infty\}=\left\{\frac{\widetilde{\mathfrak{z}}_{k-1}}{\mathfrak{z}_{k-1}}<\infty\right\}=\{\mathfrak{z}_{k-1}>0\}\quad(\widetilde{\mathbf{P}}\text{-п. н.}).$$

Поэтому ($\widetilde{\mathbf{P}}$-п. н.)

$$\frac{1}{2}I(\alpha_{k-1}<\infty)H_k^2= \tag{2.23}$$

$$=\frac{1}{2}I(\mathfrak{z}_{k-1}>0)\,I(z_{k-1}<\infty)\cdot\mathbf{E}_Q\left(\beta_k+\widetilde{\beta}_k-2\beta_k^{1/2}\widetilde{\beta}_k^{1/2}\,|\,\mathscr{F}_{k-1}\right).$$

По следствию 2 к лемме 3

$$\mathbf{E}_Q(\beta_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})=\mathbf{E}(1\,|\,\mathscr{F}_{k-1})=1\quad(\mathbf{P}\text{-п. н.}),$$

$$\mathbf{E}_Q(\widetilde{\beta}_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})=\widetilde{\mathbf{E}}(1\,|\,\mathscr{F}_{k-1})=1\quad(\widetilde{\mathbf{P}}\text{-п. н.}).$$

Из следствия 2 к лемме 1 ($\widetilde{\mathbf{P}}$-п. н.)

$$I(z_{k-1}<\infty)\,\mathbf{E}(1\,|\,\mathscr{F}_{k-1})=I(z_{k-1}<\infty)=I(\alpha_{k-1}<\infty)=I(\mathfrak{z}_{k-1}>0).$$

Отсюда и из (2.23) получаем, что ($\widetilde{\mathbf{P}}$-п. н.)

$$\frac{1}{2}I(\alpha_{k-1}<\infty)H_k^2=I(\mathfrak{z}_{k-1}>0)\left(1-\mathbf{E}_Q\left(\sqrt{\beta_k\beta_k}\,|\,\mathscr{F}_{k-1}\right)\right). \tag{2.24}$$

С другой стороны, по следствию 2 к лемме 3 и следствию 2 к лемме 1

$$I(\alpha_{k-1}<\infty)\,\mathbf{E}(\alpha_k^{1/2}\,|\,\mathscr{F}_{k-1})=I(\mathfrak{z}_{k-1}>0)\,\mathbf{E}_Q(\alpha_k^{1/2}\beta_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})= \tag{2.25}$$

$$=I(\mathfrak{z}_{k-1}>0)\,\mathbf{E}_Q\left([\widetilde{\mathfrak{z}}_k\mathfrak{z}_k^{-1}(\widetilde{\mathfrak{z}}_{k-1}\cdot\mathfrak{z}_{k-1}^{-1})^{\ominus}]^{1/2}\,\mathfrak{z}_k\cdot\mathfrak{z}_{k-1}^{\ominus}\,|\,\mathscr{F}_{k-1}\right)=$$

$$=\mathbf{E}_Q\left(I(\mathfrak{z}_{k-1}>0)\,[\widetilde{\mathfrak{z}}_k\widetilde{\mathfrak{z}}_k^{-1}(\widetilde{\mathfrak{z}}_{k-1}\cdot\mathfrak{z}_{k-1}^{-1})^{\ominus}]^{1/2}\,\mathfrak{z}_k\cdot\mathfrak{z}_{k-1}^{\ominus}\,|\,\mathscr{F}_{k-1}\right)=$$

$$=\mathbf{E}_Q\left(I(\mathfrak{z}_{k-1}>0)\,[\widetilde{\mathfrak{z}}_k\mathfrak{z}_k(\widetilde{\mathfrak{z}}_{k-1}\cdot\mathfrak{z}_{k-1}^{-1})^{\oplus}(\mathfrak{z}_{k-1}^2)^{\oplus}]^{1/2}\,|\,\mathscr{F}_{k-1}\right)=$$

$$=I(\mathfrak{z}_{k-1}>0)\,\mathbf{E}_Q\left[\sqrt{\beta_k\widetilde{\beta}_k}\,|\,\mathscr{F}_{k-1}\right].$$

Из (2.24) и (2.25) получаем требуемое равенство (2.22).

## § 3. Асимптотическая равномерная плотность для субмартингалов

**1.** Будем предполагать заданными вероятностные пространства $(\Omega^n, \mathscr{F}^n, \mathbf{P}^n)_{n\geqslant 1}$ с потоками $\mathbf{F}^n=(\mathscr{F}^n_k)_{k\geqslant 0}$, $\mathscr{F}^n_k\subseteq\mathscr{F}^n_{k+1}\subseteq\mathscr{F}^n$, $\mathscr{F}^n=\sigma(\bigcup\mathscr{F}^n_k)$, $\mathscr{F}^n_0=\{\varnothing, \Omega\}$.

Лемма 5. *Пусть* $A^n=(A^n_k, \mathscr{F}^n_k)_{k\geqslant 0}, n\geqslant 1$, — *неубывающие процессы локально интегрируемой (относительно мер* $\mathbf{P}^n$*) вариации* ($A^n\in\mathscr{A}^+_{\mathrm{loc}}(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$) *с* $A^n_0=0$, $\widetilde{A}^n=(\widetilde{A}^n_k, \mathscr{F}^n_{k-1})$ — *их компенсаторы (т. е.* $A^n-\widetilde{A}^n$ *принадлежит классу локальных мартингалов* $\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$ *и* $A^n_\infty=\lim\limits_k A^n_k$, $\widetilde{A}^n_\infty=\lim\limits_k\widetilde{A}^n_k$.

*Тогда*

$$(\widetilde{A}^n_\infty, \mathbf{P}^n)\text{-}\textit{плотно}\Rightarrow(A^n_\infty, \mathbf{P}^n)\text{-}\textit{плотно}.$$

*Если к тому же*

$$\sup_n\mathbf{E}^n\sup_{k\geqslant 1}(A^n_k-A^n_{k-1})<\infty,$$

*то*

$$(\widetilde{A}^n_\infty, \mathbf{P}^n)\text{-}\textit{плотно}\Leftrightarrow(A^n_\infty, \mathbf{P}^n)\text{-}\textit{плотно}.$$

Доказательство. Пусть $X=(X_k, \mathscr{F}_k)$ и $Y=(Y_k, \mathscr{F}_k)$ — два неотрицательных процесса с дискретным временем $k\geqslant 0$, причем $Y$ — неубывающий и локально интегрируемый, заданные на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ с неубывающим семейством $\sigma$-алгебр $\mathbf{F}=(\mathscr{F}_k)_{k\geqslant 0}$.

Предположим, что процесс $X$ доминируется процессом $Y$ в том смысле, что для любого конечного момента остановки $\tau$ $\mathbf{E}X_\tau\leqslant\mathbf{E}Y_\tau$ [12]. Если процесс $Y$ является предсказуемым, т. е. $Y_k$ — $\mathscr{F}_{k-1}$-измеримы, то справедливо неравенство Ленгляра (см. [12]): для любых $N>0$, $L>0$ и любого момента остановки $\tau$

$$\mathbf{P}(\sup_{k\leqslant\tau}X_k\geqslant N)\leqslant\frac{L}{N}+\mathbf{P}(Y_\tau\geqslant L). \tag{3.1}$$

В случае, когда $Y$ не обязательно является предсказуемым, имеет место неравенство Ленгляра — Реболледо (см. [13]): для любых $N>0$, $L>0$ и любого момента остановки $\tau$

$$\mathbf{P}(\sup_{k\leqslant\tau}X_k\geqslant N)\leqslant\frac{1}{N}[L+\mathbf{E}\sup_k(A_k-A_{k-1})]+\mathbf{P}(Y_\tau\geqslant L). \tag{3.2}$$

Поскольку в условиях леммы для любого конечного момента остановки $\tau$ (относительно $\mathbf{F}^n$) $\mathbf{E}A^n_\tau=\mathbf{E}\widetilde{A}^n_\tau$, то из (3.1) выводим, что

$$\mathbf{P}^n(A^n_\infty\geqslant N)\leqslant\frac{L}{N}+\mathbf{P}^n(\widetilde{A}^n_\infty\geqslant L), \tag{3.3}$$

а из (3.2) находим, что

$$\mathbf{P}^n(\widetilde{A}^n_\infty\geqslant N)\leqslant\frac{1}{N}[L+\mathbf{E}^n\sup_k(A^n_k-A^n_{k-1})]+\mathbf{P}^n(A^n_\infty\geqslant L). \tag{3.4}$$

Из этих неравенств требуемые утверждения леммы следуют очевидным образом после применения операций $\lim\limits_L\overline{\lim\limits_N}\,\overline{\lim\limits_n}$.

**2.** Лемма 6. *Пусть* $M^n=(M^n_k, \mathscr{F}^n_k)_{k\geqslant 0}$ — *локальные мартингалы (относительно мер* $\mathbf{P}^n$*),* $M^n\in\mathscr{M}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$ *и*

$$\sup_n\mathbf{E}^n\sup_{k\geqslant 1}|M^n_k-M^n_{k-1}|<\infty. \tag{3.5}$$

*Тогда*

(3.6) $\quad ([M^n, M^n]_\infty, \mathbf{P}^n)$*-плотно* $\Leftrightarrow (\sup\limits_k |M_k^n|, \mathbf{P}^n)$*-плотно.*

Доказательство. Воспользуемся неравенствами Дэвиса ([17], с. 490)

$$\mathbf{E}^n \sup_{k\leqslant\tau} |M_k^n| \leqslant C_1 \mathbf{E}^n [M^n, M^n]_\tau^{1/2}, \tag{3.7}$$

$$\mathbf{E}^n [M^n, M^n]_\tau^{1/2} \leqslant C_2 \mathbf{E}^n \sup_{k\leqslant\tau} |M_k^n|, \tag{3.8}$$

справедливыми для любого момента остановки $\tau$ (относительно $\mathbf{F}^n$) с универсальными константами $0 < C_1 < \infty$, $0 < C_2 < \infty$.

Тогда из (3.2)

$$\mathbf{P}^n (\sup_k |M_k^n| \geqslant N) \leqslant \frac{1}{N} \{L + C_1 \mathbf{E}^n \sup_k ([M^n, M^n]_k^{1/2} - [M^n, M^n]_{k-1}^{1/2})\} + \\ + \mathbf{P}^n ([M^n, M^n]_\infty^{1/2} \geqslant L/C_1) \tag{3.9}$$

и аналогично

$$\mathbf{P}^n ([M^n, M^n]_\infty \geqslant N) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{N} \{L + C_2 \mathbf{E}^n \sup_k (\sup_{j\leqslant k} |M_j^n| - \sup_{j\leqslant k-1} |M_j^n|)\} + \mathbf{P}^n (\sup_k |M_k^n| \geqslant L/C_2). \tag{3.10}$$

Поскольку

$$\sup_k (\sup_{j\leqslant k} |M_j^n| - \sup_{j\leqslant k-1} |M_j^n|) \leqslant \sup_k |M_k^n - M_{k-1}^n|$$

и

$$\sup_k ([M^n, M^n]_k^{1/2} - [M^n, M^n]_{k-1}^{1/2}) \leqslant \\ \leqslant \sup_k \{([M^n, M^n]_{k-1} + (M_k^n - M_{k-1}^n)^2)^{1/2} - [M^n, M^n]_{k-1}^{1/2}\} \leqslant \sup_k |M_k^n - M_{k-1}^n|,$$

то в силу предположения (3.5) требуемое утверждение (3.6) следует из неравенств (3.9) и (3.10) в результате применения операций $\lim\limits_L \overline{\lim\limits_N}\, \overline{\lim\limits_n}$.

Лемма 7. *Пусть* $M^n = (M_k^n, \mathscr{F}_k^n)_{k\geqslant 0}$ — *локально квадратично интегрируемые мартингалы* ($M^n \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^2(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$). *Тогда*

(3.11) $\quad (\langle M^n\rangle_\infty, \mathbf{P}^n)$*-плотно* $\Rightarrow (\sup\limits_k |M_k^n|, \mathbf{P}^n)$*-плотно.*

*Если к тому же*

$$\sup_n \mathbf{E}^n \sup_k |M_k^n - M_{k-1}^n|^2 < \infty, \tag{3.12}$$

*то*

(3.13) $\quad (\langle M^n\rangle_\infty, \mathbf{P}^n)$*-плотно* $\Leftrightarrow (\sup\limits_k |M_k^n|, \mathbf{P}^n)$*-плотно.*

Доказательство. Поскольку $(M^n)^2$ доминируется предсказуемым процессом $\langle M^n\rangle$, то в силу (3.1)

$$\mathbf{P}^n (\sup_k |M_k^n| \geqslant N) \leqslant \frac{L}{N^2} + \mathbf{P}^n (\langle M^n\rangle_\infty \geqslant L)$$

и (3.11) следует отсюда после предельных переходов $\lim\limits_L \overline{\lim\limits_N}\, \overline{\lim\limits_n}$.

Далее,

$$\sup_k ([M^n, M^n]_k - [M^n, M^n]_{k-1}) = \sup_k |M_k^n - M_{k-1}^n|^2.$$

Поэтому в силу (3.12) и второго утверждения леммы 5

(3.14) $\qquad ([M^n, M^n]_\infty, \mathbf{P}^n)$-*плотно* $\Longleftrightarrow (\langle M^n\rangle_\infty, \mathbf{P}^n)$-*плотно.*

Вместе с (3.6) это дает требуемое соотношение (3.13).

Лемма 8. *Пусть* $X^n = (X_k^n, \mathscr{F}_k^n)_{k\geqslant 0}$ — *субмартингал*, $n \geqslant 1$, *с*

(3.15) $\qquad |x_k^n| \leqslant c, \quad k \geqslant 1, \quad n \geqslant 1,$

*где* $x_k^n = X_k^n - X_{k-1}^n$, $k \geqslant 1$.

*Тогда*

(3.16) $\quad (\sup_k |X_k^n|, \ \mathbf{P}^n)$-*плотно* $\Longleftrightarrow \left(\sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}^n (x_k^n + (x_k^n)^2 | \mathscr{F}_{k-1}^n), \ \mathbf{P}^n\right)$-*плотно.*

Доказательство. Поскольку $X^n$ — субмартингалы, то $\mathbf{E}^n(x_k^n \mid \mathscr{F}_{k-1}^n) \geqslant 0$. Обозначим

$$A_0^n = 0, \quad A_k^n = \sum_{j=1}^k \mathbf{E}^n (x_j^n | \mathscr{F}_{j-1}^n), \quad M_k^n = X_k^n - A_k^n.$$

Очевидно, что $A_k^n - A_{k-1}^n \leqslant c$ и $|M_k^n - M_{k-1}^n| \leqslant 2c$. Следовательно, $M^n \in \mathscr{M}_{\mathrm{loc}}^2 (\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$.

Заметим, что

$$\langle M^n\rangle_k = \sum_{j=0}^k \{\mathbf{E}^n ((x_j^n)^2 | \mathscr{F}_{j-1}^n) - (\mathbf{E}^n (x_j^n | \mathscr{F}_{j-1}^n))^2\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^k \mathbf{E}^n ((x_j^n)^2 | \mathscr{F}_{j-1}^n) \qquad (= B_k^n),$$

и если обозначить $Y_k^n = A_k^n + \sup_{j\leqslant k} (M_j^n)^2$, то, применяя неравенство Дуба, получим, что

$$\mathbf{E}^n Y_\tau^n \leqslant \mathbf{E}^n (A_\tau^n + 4\langle M^n\rangle_\tau) \leqslant 4\mathbf{E}^n (A_\tau^n + B_\tau^n)$$

для любого конечного момента остановки $\tau$ (относительно $(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$). Поэтому в силу (3.1)

$$\mathbf{P}^n (Y_\infty^n \geqslant N) \leqslant \frac{L}{N} + \mathbf{P}^n (A_\infty^n + B_\infty^n \geqslant L/4).$$

Воспользуемся теперь тем, что

$$Y_\infty^n + 1 \geqslant A_\infty^n + \sup_k |M_k^n| \geqslant \sup_k |X_k^n|.$$

Тогда

(3.17) $\quad \mathbf{P}^n (\sup_k |X_k^n| \geqslant N+1) \leqslant \mathbf{P}^n (Y_\infty^n \geqslant N) \leqslant \frac{L}{N} + \mathbf{P}^n (A_\infty^n + B_\infty^n \geqslant L/4)$

и импликация $\Leftarrow$ в (3.16) следует отсюда в результате операций $\lim_L \overline{\lim_N}\ \overline{\lim_n}$.

Установим теперь импликацию $\Rightarrow$.

Поскольку для любого конечного момента остановки $\tau$ (относительно $(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$)

$$\mathbf{E}^n A_{k\wedge\tau}^n = \mathbf{E}^n X_{k\wedge\tau}^n \leqslant \mathbf{E}^n \sup_{j\leqslant\tau} |X_j^n|,$$

то

$$\mathbf{E}^n A_\tau^n \leqslant \mathbf{E}^n \sup_{j\leqslant\tau} |X_j^n|.$$

Тогда в силу (3.2)

$$\mathbf{P}^n(A_\infty^n \geqslant N) \leqslant \frac{L+c}{N} + \mathbf{P}^n(\sup_k |X_k^n| \geqslant L),$$

и значит,

$$(3.18)\qquad (\sup_k |X_k^n|,\ \mathbf{P}^n)\text{-плотно} \Rightarrow (A_\infty^n,\ \mathbf{P}^n)\text{-плотно}.$$

Поскольку $\sup_k |M_k^n| \leqslant \sup_k |X_k^n| + A_\infty^n$, то

$$(\sup_k |X_k^n|,\ \mathbf{P}^n)\text{-плотно} \Rightarrow (\sup_k |M_k^n|,\ \mathbf{P}^n)\text{-плотно}.$$

По лемме 7

$$(3.19)\qquad (\sup_k |M_k^n|,\ \mathbf{P}^n)\text{-плотно} \Rightarrow (\langle M^n\rangle_\infty,\ \mathbf{P}^n)\text{-плотно}.$$

Далее, $B_\infty^n \leqslant \langle M^n\rangle_\infty + (A_\infty^n)^2$,

$$\sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}^n(x_k^n + (x_k^n)^2 | \mathscr{F}_{k-1}^n) = A_\infty^n + B_\infty^n \leqslant A_\infty^n + (A_\infty^n)^2 + \langle M^n\rangle_\infty,$$

и поэтому импликация ($\Rightarrow$) в (3.16) следует из (3.18), (3.19).

## § 4. Характеризация контигуальности и полной асимптотической разделимости

Пусть $(\Omega^n, \mathscr{F}^n)$ — последовательность измеримых пространств, $(\mathbf{P}^n)$ и $(\widetilde{\mathbf{P}}^n)$ — вероятностные меры на $(\Omega^n, \mathscr{F}^n)$, $n \geqslant 1$.

Лемма 9. *Следующие условия являются эквивалентными:*

(а) $$(\widetilde{\mathbf{P}}^n) \lhd (\mathbf{P}^n);$$

(б) $\lim_n \widetilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} = \infty) = 0$ *и* $(z_{n\infty})_{n\geqslant 0}$ *равномерно интегрируемы относительно* $(\mathbf{P}^n)$:

$$(4.1)\qquad \sup_n \int_{\{z_{n\infty} > c\}} z_{n\infty}\, d\mathbf{P}^n \to 0, \qquad c \to \infty;$$

(в) $$(z_{n\infty},\ \widetilde{\mathbf{P}}^n)\text{-}\textit{плотно};$$

(г) $$(\sup_k z_{nk},\ \widetilde{\mathbf{P}}^n)\text{-}\textit{плотно}.$$

Доказательство. Эквивалентность условий (а), (б) и (в) известна (см., например, [5]). Вводимое условие (г) и факт эквивалентности его условию (а) являются, по-видимому, новыми. Оказывается при этом, что именно равносильность условий (а) и (г) играет решающую роль при доказательстве основной теоремы 1.

Для полноты изложения и удобства читателя приведем доказательство эквивалентности всех указанных четырех условий.

(а) $\Rightarrow$ (б). Поскольку $\mathbf{P}^n(z_{n\infty} = \infty) = 0$, то из условия контигуальности вытекает, что $\lim_n \widetilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} = \infty) = 0$. Условие (4.1) равносильно (см. лемму в п. 3 работы [5]; ср. также с леммой 2 на с. 206 в [17]) следующим двум условиям:

$$(4.2)\qquad \sup_n \int_\Omega z_{n\infty}\, d\mathbf{P}^n < \infty,$$

$$(4.3)\qquad \mathbf{P}^n(A^n) \to 0,\quad A^n \in \mathscr{F}^n \Rightarrow \int_{A^n} z_{n\infty}\, d\mathbf{P}^n \to 0.$$

Из разложения Лебега

$$\int\limits_{A^n} z_{n\infty}\, d\mathbf{P}^n \leqslant \widetilde{\mathbf{P}}^n(A^n) \leqslant 1.$$

Отсюда очевидным образом следует выполнимость условий (4.2) и (4.3), поскольку в силу контигуальности

$$\mathbf{P}^n(A^n) \to 0, \quad A^n \in \mathscr{F}^n \Rightarrow \widetilde{\mathbf{P}}^n(A^n) \to 0.$$

(б) $\Rightarrow$ (в). В силу разложения Лебега

$$\widetilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} > N) = \int\limits_{\{z_{n\infty}>N\}} z_{n\infty}\, d\mathbf{P}^n + \widetilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} = \infty).$$

Тогда из условия (б)

$$\varlimsup_n \widetilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} > N) = \varlimsup_n \int\limits_{\{z_{n\infty}>N\}} z_{n\infty}\, d\mathbf{P}^n \to 0, \qquad N \to \infty,$$

что и доказывает (в).

(в) $\Rightarrow$ (а). Из условия (в) вытекает, что для $\varepsilon > 0$ можно найти $N$ и $n_0$ такие, что для всякого $n \geqslant n_0$ $\widetilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} > N) \leqslant \varepsilon/2$. Тогда

$$\widetilde{\mathbf{P}}^n(A^n) = \widetilde{\mathbf{P}}^n(A^n \cap \{z_{n\infty} \leqslant N\}) + \widetilde{\mathbf{P}}^n(A^n \cap \{z_{n\infty} > N\}) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{A^n \cap \{z_{n\infty} \leqslant N\}} z_{n\infty} d\widetilde{\mathbf{P}}^n + \widetilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} > N) \leqslant N\mathbf{P}^n(A^n) + \varepsilon/2,$$

и если $\mathbf{P}^n(A^n) \to 0$, то $\varlimsup_n \widetilde{\mathbf{P}}^n(A^n) \leqslant \varepsilon/2$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует условие (а).

(в) $\Longleftrightarrow$ (г). Справедливость этих импликаций следует очевидным образом из следующих неравенств:

$$\widetilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} \geqslant N) \leqslant \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant N) \leqslant \frac{L}{N} + \widetilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} \geqslant L). \tag{4.4}$$

Левое неравенство очевидно. Для доказательства правого воспользуемся разложением Лебега. Тогда

$$\widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant N) =$$

$$= \int\limits_{\{\sup_k z_{nk} \geqslant N\}} z_{n\infty}\, d\mathbf{P}^n + \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant N,\ z_{n\infty} = \infty) =$$

$$= \int\limits_{\{\sup_k z_{nk} \geqslant N\}} z_{n\infty}\, d\mathbf{P}^n + \widetilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} = \infty) =$$

$$= \int\limits_{\{\sup_k z_{nk} \geqslant N,\ z_{n\infty} \geqslant L\}} z_{n\infty}\, d\mathbf{P}^n + \int\limits_{\{\sup_k z_{nk} \geqslant N,\ z_{n\infty} < L\}} z_{n\infty}\, d\mathbf{P}^n + \widetilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} = \infty) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\{z_{n\infty} \geqslant L\}} z_{n\infty}\, d\mathbf{P}^n + L \int\limits_{\{\sup_k z_{nk} \geqslant N\}} d\mathbf{P}^n + \widetilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} = \infty) =$$

$$= \widetilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} \geqslant L) + L\mathbf{P}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant N),$$

где по лемме 2 $\mathbf{P}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant N) \leqslant 1/N$.

Тем самым правое неравенство в (4.4) также доказано.

Лемма 10. *Следующие условия*:

(а) $$(\widetilde{\mathbf{P}}^n) \vartriangle (\mathbf{P}^n);$$

(б) $$\varlimsup_n \widetilde{\mathbf{P}}^n (z_{n\infty} \geqslant N) = 1 \quad \forall N > 0;$$

(в) $$\varlimsup_n \widetilde{\mathbf{P}}^n (\sup_k z_{nk} \geqslant N) = 1 \quad \forall N > 0$$

*являются эквивалентными*.

Доказательство равносильности условий (а) и (б) будет следовать работе [10]. (а) $\Rightarrow$ (б). В соответствии с определением 2 § 1 найдутся подпоследовательность $(n')$ и множества $A^{n'} \in \mathcal{F}^{n'}$ такие, что

(4.5) $$\lim_{n'} \mathbf{P}^{n'} (A^{n'}) = 0 \text{ и } \lim_{n'} \widetilde{\mathbf{P}}^{n'} (A^{n'}) = 1.$$

Тогда в силу разложения Лебега

$$\widetilde{\mathbf{P}}^{n'} (A^{n'}) = \int\limits_{A^{n'} \cap \{z_{n'\infty} \leqslant L\}} z_{n'\infty}\, d\mathbf{P}^{n'} + \widetilde{\mathbf{P}}^{n'} (A^{n'} \cap \{z_{n'\infty} > L\}) \leqslant$$

$$\leqslant L\mathbf{P}^{n'} (A^{n'}) + \widetilde{\mathbf{P}}^{n'} (z_{n'\infty} > L).$$

Вместе с (4.5) отсюда вытекает, что $\lim\limits_{n'} \widetilde{\mathbf{P}}^{n'}(z_{n'\infty} > L) = 1$, и значит, имеет место (б).

(б) $\Rightarrow$ (а). Из справедливости (б) следует, что найдется подпоследовательность $(n_k)$ такая, что $n_k < n_{k+1}$ и

$$\widetilde{\mathbf{P}}^{n_k} (z_{n_k\infty} > k) \geqslant 1 - 1/k.$$

Так что

$$\lim_{k\to\infty} \widetilde{\mathbf{P}}^{n_k} (z_{n_k\infty} > k) = 1.$$

В то же время $\mathbf{P}^{n_k}(z_{n_k\infty} > k) \leqslant \mathbf{E}^{n_k} z_{n_k\infty}/k \leqslant 1/k$. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{P}^{n_k}(z_{n_k\infty} > k) = 0$, и следовательно, $(\widetilde{\mathbf{P}}^n) \vartriangle (\mathbf{P}^n)$.

(б) $\Leftrightarrow$ (в). Импликация (б) $\Rightarrow$ (в) очевидна. Для доказательства (в) $\Rightarrow$ (б) заметим, что согласно (4.4)

$$\widetilde{\mathbf{P}}^n (\sup_k z_{nk} \geqslant N) \leqslant \frac{L}{N} + \widetilde{\mathbf{P}}^n (z_{n\infty} \geqslant L),$$

и значит, для любого $L > 0$

$$\varlimsup_n \widetilde{\mathbf{P}}^n (z_{n\infty} \geqslant L) \leqslant 1 - \frac{L}{N} \to 1, \qquad N \to \infty.$$

## § 5. Доказательство теоремы 1

1. Начнем с доказательства второй части теоремы, т. е. покажем, что при выполнении условия ($\alpha$) имеют место импликации

(5.1) $$(\beta) \Leftrightarrow (\beta^*)$$

и

(5.2) $$(\beta) \Leftrightarrow (\beta^{**}).$$

$(\beta) \Rightarrow (\beta^*)$. Согласно лемме 4

$$\frac{1}{2} I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\, \mathbf{E}_{Q^n} [(\sqrt{\widetilde{\beta}_{nk}} - \sqrt{\beta_{nk}})^2 \,|\, \mathscr{F}^n_{k-1}] = $$
$$= I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\,(1 - \mathbf{E}^n(\sqrt{\alpha_{nk}} \,|\, \mathscr{F}^n_{k-1})).$$

Поэтому $(\beta) \Rightarrow (\beta^*)$.

Пусть теперь выполнено условие $(\alpha)$. Покажем, что тогда

$(\beta^*) \Rightarrow (\beta)$. Пусть $\xi_{nk}$ — неотрицательные случайные величины. Тогда для всяких $L > 0$ и $N > 0$

$$(5.3) \quad \widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{nk} \geqslant N\Big) = \widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\,\xi_{nk} \geqslant N,\ \sup_k \alpha_{nk} < \infty\Big) +$$
$$+ \widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_{nk} \geqslant N,\ \sup_k \alpha_{nk} = \infty\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\,\xi_{nk} \geqslant N\Big) + \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k \alpha_{nk} \geqslant L).$$

Отсюда требуемая импликация $(\beta^*) \Rightarrow (\beta)$ следует (с учетом $(\alpha)$) в результате предельных переходов $\lim\limits_L \lim\limits_N \varlimsup\limits_n$, если положить $\xi_{nk} = \mathbf{E}_{Q^n} [(\sqrt{\widetilde{\beta}_{nk}} - \sqrt{\beta_{nk}})^2 \,|\, \mathscr{F}^n_{k-1}]$.

Итак, (5.1) доказано.

$(\beta) \Rightarrow (\beta^{**})$. Ясно, что

$$(5.4) \quad I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\, \mathbf{E}^n((1 - \sqrt{\alpha_{nk}})^2 \,|\, \mathscr{F}^n_{k-1}) =$$
$$= 2I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\{1 - \mathbf{E}^n(\sqrt{\alpha_{nk}} \,|\, \mathscr{F}^n_{k-1})\} - 2I(\alpha_{n,k-1} < \infty) +$$
$$+ I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\, \mathbf{E}(1 \,|\, \mathscr{F}^n_{k-1}) + I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\, \mathbf{E}^n(\alpha_{n,k} \,|\, \mathscr{F}^n_{k-1}).$$

Из (2.9) с $\eta \equiv 1$ следует, что $\widetilde{\mathbf{P}}^n$-п. н.

$$(5.5) \quad I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\, \mathbf{E}^n(\alpha_{n,k} \,|\, \mathscr{F}^n_{k-1}) = 1 - \widetilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{n,k} = \infty \,|\, \mathscr{F}^n_{k-1}),$$

а из (2.6) с $\eta = \mathbf{E}^n(1 \,|\, \mathscr{F}^n_{k-1}) - 1$ следует, что $\widetilde{\mathbf{P}}^n$-п. н.

$$(5.6) \quad I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\, \mathbf{E}^n(1 \,|\, \mathscr{F}^n_{k-1}) = I(\alpha_{n,k-1} < \infty).$$

Поэтому из (5.4) — (5.6) находим, что $\widetilde{\mathbf{P}}^n$-п. н.

$$(5.7) \quad I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\, \mathbf{E}^n((1 - \sqrt{\alpha_{nk}})^2 \,|\, \mathscr{F}^n_{k-1}) =$$
$$= 2I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\{1 - \mathbf{E}^n(\sqrt{\alpha_{nk}} \,|\, \mathscr{F}^n_{k-1})\} - I(\alpha_{n,k-1} < \infty) +$$
$$+ 1 - \widetilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{n,k} = \infty \,|\, \mathscr{F}^n_{k-1}) = 2I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\{1 - \mathbf{E}^n(\sqrt{\alpha_{nk}} \,|\, \mathscr{F}^n_{k-1})\} +$$
$$+ I(\alpha_{n,k-1} = \infty) - \widetilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{n,k} = \infty \,|\, \mathscr{F}^n_{k-1}).$$

Поскольку $(\beta) \Rightarrow (\beta^*)$ и выполнено условие $(\alpha)$, то в силу (5.3) достаточно лишь показать, что для любого $L \geqslant 1$

$$(5.8) \quad (\alpha) \Rightarrow \varlimsup_n \widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} = \infty) \geqslant L\Big) = 0$$

и

$$(5.9) \quad (\alpha) \Rightarrow \varlimsup_n \widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{nk} = \infty \,|\, \mathscr{F}^n_{k-1}) \geqslant L\Big) = 0.$$

Но поскольку

$$\{\sup_k \alpha_{nk} > N\} = \{\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} > N) \geqslant 1\} \supseteq \{\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} = \infty) \geqslant 1\},$$

то в силу условия ($\alpha$)

$$\overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sum_{n=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} = \infty) \geqslant 1) \leqslant \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k \alpha_{nk} \geqslant N) \to 0, \quad N \to \infty,$$

и, в частности, для любого $L \geqslant 1$ справедливо соотношение (5.8).

Наконец, из (3.4)

$$\widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{nk} = \infty \,|\, \mathscr{F}_{k-1}^n) \geqslant N\Big) \leqslant \frac{L+1}{N} + \widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} = \infty) \geqslant L\Big).$$

Отсюда и из (5.8) следует (5.9).

($\beta^{**}$) $\Rightarrow$ ($\beta^*$). Из ($\beta^{**}$) вытекает, что

$$\lim_N \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n\{\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\, \mathbf{E}^n[(1-\alpha_{nk}^{1/2})^2 \,|\, \mathscr{F}_{k-1}^n] \geqslant N\} = 0.$$

Отсюда свойство ($\beta^*$) следует из (5.7) и соотношений (5.8) и (5.9), выполняемых при условии ($\alpha$).

Итак, ($\beta$) $\Rightarrow$ ($\beta^{**}$) $\Rightarrow$ ($\beta^*$) $\Rightarrow$ ($\beta$), что доказывает (в предположении ($\alpha$)) справедливость импликаций (5.2).

2. Перейдем к доказательству первой части теоремы.

Достаточность. В силу леммы 9 надо показать, что

(5.10) $$(\alpha),\ (\beta) \Rightarrow (\sup_k z_{nk},\ \widetilde{\mathbf{P}}^n)\text{-плотно}.$$

С этой целью для всякого $c \geqslant 1$ введем функцию

$$u^c(x) = \begin{cases} x, & |x| \leqslant c, \\ c \operatorname{sign} x, & |x| > c \end{cases}$$

и множества

$$A_c^n = \{\sup_k \alpha_{nk} < e^c\} \cap \{\inf_k \alpha_{nk} > e^{-c}\}.$$

Обозначим также

(5.11) $$X_{nk}^c = \sum_{j=1}^{k} u_c(\ln \alpha_{nj})$$

и отметим, что

$$X_{nk}^c \cdot I_{A_c^n} = (\sum_{j=1}^{k} \ln \alpha_{nj}) \cdot I_{A_c^n} = (\ln z_{nk}) \cdot I_{A_c^n}.$$

Поэтому для $N \geqslant 1$

(5.12) $$\{\sup_k z_{nk} \geqslant N\} \subseteq \{\sup_k |X_{nk}^c| \geqslant \ln N\} \cup \{\Omega \setminus A_c^n\} = \\ = \{\sup_k |X_{nk}^c| \geqslant \ln N\} \cup \{\sup_k \alpha_{nk} \geqslant e^c\} \cup \{\inf_k \alpha_{nk} \leqslant e^{-c}\}$$

и аналогично

(5.13) $$\{\sup_k |X_{nk}^c| \geqslant \ln N\} \subseteq \{\sup_k |\ln z_{nk}| \geqslant \ln N\} \cup \{\Omega \setminus A_c^n\} = \\ = \{\sup_k z_{nk} \geqslant N\} \cup \Big\{\inf_k z_{nk} \leqslant \frac{1}{N}\Big\} \cup \{\sup_k \alpha_{nk} \geqslant e^c\} \cup \{\inf_k \alpha_{nk} \leqslant e^{-c}\}.$$

Из (5.12) и условия $(\alpha)$ в результате операции $\overline{\lim\limits_{c}}\ \overline{\lim\limits_{N}}\ \overline{\lim\limits_{n}}$ находим, что

$$\overline{\lim_{N}}\ \overline{\lim_{n}}\ \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant N) \leqslant \tag{5.14}$$

$$\leqslant \overline{\lim_{c}}\ \overline{\lim_{N}}\ \overline{\lim_{n}}\ \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k |X^c_{nk}| \geqslant \ln N) + \overline{\lim_{c}}\ \overline{\lim_{n}}\ \widetilde{\mathbf{P}}^n(\inf_k \alpha_{nk} \leqslant e^{-c}).$$

Покажем, что

$$(\alpha),\ (\beta) \Rightarrow \overline{\lim_{c}}\ \overline{\lim_{n}}\ \widetilde{\mathbf{P}}^n(\inf_k \alpha_{nk} \leqslant e^{-c}) = 0. \tag{5.15}$$

Из леммы 3 с $\eta = (1-\alpha_{nk}^{-1/2})^2$ имеем ($\widetilde{\mathbf{P}}^n$-п.н.)

$$\widetilde{\mathbf{E}}^n((1-\alpha_{nk}^{-1/2})^2|\mathscr{F}^n_{k-1}) = I(\alpha_{n,\,k-1}<\infty)\,\mathbf{E}^n((1-\sqrt{\alpha_{nk}})^2|\mathscr{F}^n_{k-1}) +$$
$$+\widetilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{nk}=\infty\,|\mathscr{F}^n_{k-1}) - I(\alpha_{n,\,k-1}<\infty)\,\mathbf{P}(\alpha_{n,\,k}=0\,|\,\mathscr{F}^n_{k-1}).$$

Поскольку $(\alpha)$, $(\beta) \Rightarrow (\beta^{**})$ и $(\alpha) \Rightarrow (5.9)$, то

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\mathbf{E}}^n((1-\alpha_{nk}^{-1/2})^2|\mathscr{F}^n_{k-1}),\ \widetilde{\mathbf{P}}^n\Big)\text{-плотно.} \tag{5.16}$$

Отсюда по лемме 5

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} (1-\alpha_{kn}^{-1/2})^2,\ \widetilde{\mathbf{P}}^n\Big)\text{-плотно.} \tag{5.17}$$

Далее, для $N \geqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} \leqslant 1/N)(N^{1/2}-1)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk}\leqslant 1/N)(1-\alpha_{nk}^{-1/2})^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}(1-\alpha_{nk}^{-1/2})^2,$$

и значит,

$$\widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk}\leqslant 1/N) \geqslant L\,(N^{1/2}-1)^{-2}\Big) \leqslant \widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}(1-\alpha_{nk}^{-1/2})^2 \geqslant L\Big).$$

Полагая $L=(N^{1/2}-1)^2$, отсюда и из (5.17) после предельного перехода $\overline{\lim\limits_{N}}\ \overline{\lim\limits_{n}}$ получаем

$$\overline{\lim_{N}}\ \overline{\lim_{n}}\ \widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk}\leqslant 1/N) \geqslant 1\Big) = 0. \tag{5.18}$$

Но $\{\inf\limits_k \alpha_{nk} < 1/N\} = \Big\{\sum\limits_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk}<1/N) \geqslant 1\Big\}$. Поэтому требуемая импликация (5.15) следует из (5.18).

Итак, в правой части неравенства (5.14) последнее слагаемое равно нулю. Установим теперь, что

$$(\alpha),\ (\beta) \Rightarrow \overline{\lim_{N}}\ \overline{\lim_{n}}\ \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k |X^c_{nk}| \geqslant \ln N) = 0, \tag{5.19}$$

иначе говоря, покажем, что для $\forall\, c \geqslant 1$

$$(\alpha),\ (\beta) \Rightarrow (\sup_k |X^c_{nk}|,\ \widetilde{\mathbf{P}}^n)\text{-плотно.}$$

Покажем, что для $\forall\, c \geqslant 1$ $X^n = (X^c_{nk},\ \mathscr{F}^n_k)$ относительно меры $\widetilde{\mathbf{P}}^n$ является субмартингалом, $n \geqslant 1$, для чего достаточно показать, что ($\widetilde{\mathbf{P}}^n$-п.н.)

$$\widetilde{\mathbf{E}}^n(u_c(\ln \alpha_{nj})|\mathscr{F}^n_{j-1}) \geqslant 0. \tag{5.20}$$

По лемме 3 ($\widetilde{\mathbf{P}}^n$-п.н.)

$$\widetilde{\mathbf{E}}^n (u_c (\ln \alpha_{nj}) | \mathcal{F}^n_{j-1}) = \tag{5.21}$$
$$= I (\alpha_{n,\,j-1} < \infty)\, \mathbf{E}^n (\alpha_{nj} u_c (\ln \alpha_{nj}) | \mathcal{F}^n_{j-1}) + c \widetilde{\mathbf{P}}^n (\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}^n_{j-1}).$$

Заметим, что $x u_c (\ln x) \geqslant x - 1$ при $x \geqslant 0$. Поэтому ($\widetilde{\mathbf{P}}^n$-п.н.)

$$I (\alpha_{n,\,j-1} < \infty) \mathbf{E}^n (\alpha_{nj} u_c (\ln \alpha_{nj}) | \mathcal{F}^n_{j-1}) \geqslant \tag{5.22}$$
$$\geqslant I (\alpha_{n,\,j-1} < \infty)\, \mathbf{E}^n (\alpha_{nj} - 1 | \mathcal{F}^n_{j-1}) \quad (= J_{nj}).$$

Вновь применяя лемму 3 и следствие 2 к лемме 1, находим, что $\widetilde{\mathbf{P}}^n$-п. н.

$$J_{nj} = 1 - \widetilde{\mathbf{P}}^n (\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}^n_{j-1}) - I (\alpha_{n,\,j-1} < \infty) = \tag{5.23}$$
$$= I (\alpha_{n,\,j-1} = \infty) - \widetilde{\mathbf{P}}^n (\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}^n_{j-1}).$$

Из (5.21) — (5.23) следует, что $\widetilde{\mathbf{P}}^n$-п.н.

$$\widetilde{\mathbf{E}}^n (u_c (\ln \alpha_{nj}) | \mathcal{F}^n_{j-1}) \geqslant I (\alpha_{n,\,j-1} = \infty) + (c-1)\, \widetilde{\mathbf{P}}^n (\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}^n_{j-1}) \geqslant 0,$$

поскольку $c \geqslant 1$.

Итак, $X^n = (X^c_{nk}, \mathcal{F}^n_k)$ относительно меры $\widetilde{\mathbf{P}}^n$ является субмартингалом с $| X^c_{nk} - X^c_{n,\,k-1} | \leqslant 2c$. Тогда согласно лемме 8 из § 3 $(\sup\limits_k |X^c_{nk}|,\ \widetilde{\mathbf{P}}^n)$-плотно тогда и только тогда, когда

$$\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{\mathbf{E}}^n (u_c (\ln \alpha_{nj}) + u_c^2 (\ln \alpha_{nj}) | \mathcal{F}^n_{j-1}),\ \widetilde{\mathbf{P}}^n\Big)\text{-плотно.}$$

Из леммы 3 ($\widetilde{\mathbf{P}}^n$-п.н.)

$$L_{nj} \equiv \widetilde{\mathbf{E}}^n (u_c (\ln \alpha_{nj}) + u_c^2 (\ln \alpha_{nj}) | \mathcal{F}^n_{j-1}) = \tag{5.24}$$
$$= I (\alpha_{n,\,j-1} < \infty)\, \mathbf{E}^n (\alpha_{nj} u_c (\ln \alpha_{nj}) + \alpha_{nj} u_c^2 (\ln \alpha_{nj}) | \mathcal{F}^n_{j-1}) +$$
$$+ (c + c^2)\, \widetilde{\mathbf{P}}^n (\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}^n_{j-1}).$$

С учетом (5.22) и (5.23) отсюда получаем, что

$$L_{nj} = I (\alpha_{n,\,j-1} < \infty)\, \mathbf{E}^n (\alpha_{nj} u_c (\ln \alpha_{nj}) + \alpha_{nj} u_c^2 (\ln \alpha_{nj}) + \tag{5.25}$$
$$+ 1 - \alpha_{nj} | \mathcal{F}^n_{j-1}) + (c + c^2)\, \widetilde{\mathbf{P}}^n (\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}^n_{j-1}) -$$
$$- I (\alpha_{n,\,j-1} < \infty) + 1 - \widetilde{\mathbf{P}}^n (\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}^n_{j-1}).$$

Воспользуемся теперь тем, что для всякого $x \geqslant 0$

$$a (c) (1 - x^{1/2})^2 \leqslant x u_c (\ln x) + x u_c^2 (\ln x) + 1 - x \leqslant A (c) (1 - x^{1/2})^2, \tag{5.26}$$

где $a(c)$ и $A(c)$ — некоторые положительные константы. Тогда

$$L_{nj} \leqslant A (c)\, I (\alpha_{n,\,j-1} < \infty)\, \mathbf{E}^n ((1 - \alpha_{nj}^{1/2})^2 | \mathcal{F}^n_{j-1}) +$$
$$+ I (\alpha_{n,\,j-1} = \infty) + [(c-1) + c^2]\, \widetilde{\mathbf{P}}^n (\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}^n_{j-1})$$

и значит,

$$\sum_{j=1}^{\infty} L_{nj} \leqslant A (c)\, \xi_1^n + \xi_2^n + [(c-1) + c^2] \xi_3^n, \tag{5.27}$$

где

$$(5.28)\qquad \begin{cases} \xi_1^n = \sum\limits_{j=1}^{\infty} I(\alpha_{n,\,j-1} < \infty)\, \mathbf{E}^n((1-\alpha_{nj}^{1/2})^2 \,|\, \mathcal{F}_{j-1}^n), \\ \xi_2^n = \sum\limits_{j=1}^{\infty} I(\alpha_{n,\,j-1} = \infty), \\ \xi_3^n = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \widetilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{nj} = \infty \,|\, \mathcal{F}_{j-1}^n). \end{cases}$$

Ясно, что

$$\widetilde{\mathbf{P}}^n\left(\sum_{j=1}^{\infty} L_{nj} \geqslant N\right) \leqslant \widetilde{\mathbf{P}}^n\left(\xi_1^n \geqslant \frac{N}{3A(c)}\right) + \\ + \widetilde{\mathbf{P}}^n\left(\xi_2^n \geqslant \frac{N}{3A(c)}\right) + \widetilde{\mathbf{P}}^n\left(\xi_3^n \geqslant \frac{N}{3[(c-1)+c^2)]}\right).$$

Поскольку ($\alpha$), ($\beta$) $\Rightarrow$ ($\beta^{**}$), то

$$\lim_N \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n\left(\xi_1^n \geqslant \frac{N}{3A(c)}\right) = 0,$$

и в силу (5.8), (5.9)

$$\lim_N \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n\left(\xi_2^n \geqslant \frac{N}{3A(c)}\right) = 0,$$

$$\lim_N \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n\left(\xi_3^n \geqslant \frac{N}{3[(c-1)+c^2]}\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} L_{nj},\ \widetilde{\mathbf{P}}^n\right)\text{-плотно},$$

а значит, $(\sup\limits_k |X_{nk}^c|,\ \widetilde{\mathbf{P}}^n)$-плотно, что и доказывает достаточность условий ($\alpha$), ($\beta$) для контигуальности $(\widetilde{\mathbf{P}}^n) \lhd (\mathbf{P}^n)$.

**3.** Необходимость. Пусть $(\widetilde{\mathbf{P}}^n) \lhd (\mathbf{P}^n)$. Покажем прежде всего, что тогда имеет место ($\alpha$), т.е. что

$$(5.29)\qquad (\widetilde{\mathbf{P}}^n) \lhd (\mathbf{P}^n) \Rightarrow (\sup_k \alpha_{nk},\ \widetilde{\mathbf{P}}^n)\text{-плотно}.$$

Согласно свойству 5° из § 2 ($\widetilde{\mathbf{P}}^n$-п.н.)

$$(5.30)\qquad \alpha_{nk} = \frac{z_{nk}}{z_{n,\,k-1}} I(\sup_k z_{nk} < \infty) + \alpha_{nk} I(\sup_k z_{nk} = \infty).$$

Поэтому для любых $N > 0$, $L > 0$, $b > 0$

$$\{\sup_k \alpha_{nk} \geqslant N\} \subseteq \left\{\frac{\sup\limits_k z_{nk}}{\inf\limits_k z_{nk}} \geqslant N,\ \sup_k z_{nk} < \infty\right\} \cup \\ \cup \{\sup_k \alpha_{nk} \geqslant N,\ \sup_k z_{nk} = \infty\} \subseteq \{\sup_k z_{nk} \geqslant N \inf_k z_{nk}\} \cup \{\sup_k z_{nk} \geqslant L\} = \\ = (\{\sup_k z_{nk} \geqslant N \inf_k z_{nk},\ \inf_k z_{nk} \leqslant b\} \cup \{\sup_k z_{nk} \geqslant L\}) \cup \\ \cup (\{\sup_k z_{nk} \geqslant N \inf_k z_{nk},\ \inf_k z_{nk} > b\} \cup \{\sup_k z_{nk} \geqslant L\}) \subseteq \\ \subseteq \{\inf_k z_{nk} \leqslant b\} \cup \{\sup_k z_{nk} \geqslant L\} \cup \{\sup_k z_{nk} \geqslant Nb\}$$

и, значит,

$$\widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k \alpha_{nk} \geqslant N) \leqslant \widetilde{\mathbf{P}}^n(\inf_k z_{nk} \leqslant b) + \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant L) + \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant Nb).$$

Отсюда в силу эквивалентности утверждений (а) и (г) леммы 9 и леммы 2 получаем

$$\lim_N \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k \alpha_{nk} \geqslant N) \leqslant b + \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant L) \to 0,$$
$$b \to 0, \quad L \to \infty.$$

Итак, (5.29) доказано.

В силу (5.30) для любых $N > 0$, $L > 0$, $b > 0$ ($\widetilde{\mathbf{P}}^n$-п.н.)

$$(5.31)\quad \left\{\inf_k \alpha_{nk} \leqslant \frac{1}{N}\right\} \subseteq \left\{\frac{\inf_k z_{nk}}{\sup_k z_{nk}} \leqslant \frac{1}{N},\ \sup_k z_{nk} < \infty\right\} \cup$$
$$\cup \left\{\inf_k \alpha_{nk} \leqslant \frac{1}{N},\ \sup_k z_{nk} = \infty\right\} \subseteq$$
$$\subseteq \{N \inf_k z_{nk} \leqslant \sup_k z_{nk}\} \cup \{\sup_k z_{nk} \geqslant L\} \subseteq$$
$$\subseteq \{Nb \leqslant \sup_k z_{nk},\ \inf_k z_{nk} > b\} \cup \{N \inf_k z_{nk} \leqslant \sup_k z_{nk},\ \inf_k z_{nk} \leqslant b\} \cup$$
$$\cup \{\sup_k z_{nk} \geqslant L\} \subseteq \{Nb \leqslant \sup_k z_{nk}\} \cup \{\inf_k z_{nk} \leqslant b\} \cup \{\sup_k z_{nk} \geqslant L\}.$$

Следовательно,

$$\widetilde{\mathbf{P}}^n\left(\inf_k \alpha_{nk} \leqslant \frac{1}{N}\right) \leqslant \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant Nb) + \widetilde{\mathbf{P}}^n(\inf_k z_{nk} \leqslant b) + \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant L).$$

По лемме 2 $\widetilde{\mathbf{P}}^n(\inf_k z_{nk} \leqslant b) \leqslant b$. Поэтому, принимая во внимание эквивалентность утверждений (а) и (г) леммы 9, имеем

$$(5.32)\quad \lim_N \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n\left(\inf_k \alpha_{nk} \leqslant \frac{1}{N}\right) \leqslant \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant L) + b \to 0,$$
$$L \to \infty, \quad b \to 0.$$

Обратимся теперь к доказательству импликации

$$(\widetilde{\mathbf{P}}^n) \lhd (\mathbf{P}^n) \Rightarrow (\beta).$$

В силу (5.13)

$$(5.33)\quad \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k |X^c_{nk}| \geqslant \ln N) \leqslant \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant N) + \widetilde{\mathbf{P}}^n\left(\inf_k z_{nk} \leqslant \frac{1}{N}\right) +$$
$$+ \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k \alpha_{nk} \geqslant e^c) + \widetilde{\mathbf{P}}^n(\inf_k \alpha_{nk} \leqslant e^{-c}).$$

Из (5.29) $\overline{\lim_{c\to\infty}}\, \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k \alpha_{nk} \geqslant e^c) = 0$. Из леммы 2 $\overline{\lim_N}\, \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n\left(\inf_k z_{nk} \leqslant \frac{1}{N}\right) = 0$; из леммы 9 $\overline{\lim_N}\, \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant N) = 0$; из (5.32) $\overline{\lim_{c\to\infty}}\, \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n \times (\inf_k \alpha_{nk} \leqslant e^{-c}) = 0$. Поэтому в результате предельного перехода $\overline{\lim_{c\to\infty}}\, \overline{\lim_N}\, \overline{\lim_n}$ из (5.33) находим, что

$$(5.34)\quad \overline{\lim_c}\, \overline{\lim_N}\, \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k |X^c_{nk}| \geqslant \ln N) = 0.$$

Отсюда и из леммы 8 вытекает, что

$$\varlimsup_{c}\varlimsup_{N}\varlimsup_{n}\widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{j=1}^{\infty}L_{nj}\geqslant N\Big)=0. \tag{5.35}$$

По аналогии с (5.27) из (5.25) и (5.26) следует оценка

$$\sum_{j=1}^{\infty}L_{nj}\geqslant a(c)\,\xi_1^n+\xi_2^n+[(c-1)+c^2]\,\xi_3^n,\qquad c\geqslant 1, \tag{5.36}$$

где $\xi_1^n$, $\xi_2^n$ и $\xi_3^n$ задаются формулами (5.28).

Из (5.36)

$$\xi_1^n\leqslant a^{-1}(c)\Big[\sum_{j=1}^{\infty}L_{nj}+\xi_2^n+((c-1)+c^2)\,\xi_3^n\Big]. \tag{5.37}$$

Из (5.29) и (5.8) вытекает, что $((\xi_2^n),\ \widetilde{\mathbf{P}}^n)$-плотно, а из (5.29) и (5.9) следует, что $((\xi_3^n),\ \widetilde{\mathbf{P}}^n)$-плотно. Вместе с (5.35) из (5.37) получаем, что поскольку $\inf\limits_{c\geqslant 1} a(c)>0$

$$(\widetilde{\mathbf{P}}^n)\lhd(\mathbf{P}^n)\Rightarrow((\xi_1^n),\ \widetilde{\mathbf{P}}^n)\text{-плотно}. \tag{5.38}$$

Отсюда и из оценки (5.3), примененной к $\xi_{nk}=\mathbf{E}^n((1-\alpha_{nk}^{1/2})^2|\mathscr{F}_{k-1}^n)$, находим, что согласно (5.2) и (5.29) $(\widetilde{\mathbf{P}}^n)\lhd(\mathbf{P}^n)\Rightarrow(\beta^{**})\Leftrightarrow(\beta)$.

Теорема 1 докаазна.

## § 6. Доказательство теорем 2 и 3

**1.** Доказательство теоремы 2 опирается на следующий общий факт (лемма 11).

Пусть $(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathbf{P})$ — вероятностное пространство с выделенным на нем неубывающим семейством $\sigma$-алгебр $\mathbf{F}=(\mathscr{F}_k)_{k\geqslant 0}$, $\mathscr{F}_0=\{\varnothing,\ \Omega\}$, и пусть $(\gamma_k)_{k\geqslant 1}$ — $\mathbf{F}$-согласованная последовательность случайных величин со значениями в $[0,\ \infty]$, для которой состояния 0 и $\infty$ являются поглощающими, т. е. $\gamma_k$ — $\mathscr{F}_k$-измеримы, $\gamma_k=0$ на $\{\gamma_j=0\}$ при $k>j$ и $\gamma_k=\infty$ на $\{\gamma_j=\infty\}$ при $k>j$ ($\mathbf{P}$-п. н.).

Положим

$$\Gamma_k=\prod_{j=1}^{k}\gamma_j,\quad a_k=\mathbf{E}(\gamma_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1}),\quad A_k=\prod_{j=1}^{k}a_j,\qquad k\geqslant 1.$$

Лемма 11. *Если* $\mathbf{E}\gamma_1\leqslant 1$ *и* $\mathbf{E}(\gamma_k\,|\,\mathscr{F}_{k-1})\leqslant 1$ ($\mathbf{P}$-*п. н.*), $k\geqslant 2$, *то последовательность* $\Gamma=(\Gamma_k)_{k\geqslant 1}$ *допускает мультипликативное разложение*

$$\Gamma_k=A_k\cdot S_k, \tag{6.1}$$

*где* $A=(A_k,\ \mathscr{F}_{k-1})_{k\geqslant 1}$ — *невозрастающая последовательность* $\mathscr{F}_{k-1}$-*измеримых случайных величин* $A_k$, *а* $S=(S_k,\ \mathscr{F}_k)_{k\geqslant 1}$ — *неотрицательный супермартингал с* $\mathbf{E}S_k\leqslant 1$.

*При этом* ($\mathbf{P}$-*п. н.*) *существует предел* $\Gamma_\infty\equiv\lim\limits_n\Gamma_n$ *и для любых* $a>0$, $b>0$

$$\mathbf{P}(\Gamma_\infty\geqslant a)\leqslant\frac{b}{a}+\mathbf{P}(A_\infty\geqslant b). \tag{6.2}$$

Доказательство. Покажем, что для получения представления (6.1) можно положить $S_k = \prod_{j=1}^{k} \gamma_j a_j^{\oplus}$, где, напомним,

$$a^{\oplus} = \begin{cases} 0, & a=0, \\ a^{-1}, & 0<a<\infty, \\ 0, & a=\infty. \end{cases}$$

С этой целью достаточно показать, что

$$\gamma_j = \gamma_j a_j^{\oplus} a_j \quad (\mathbf{P}\text{-п. н.}). \tag{6.3}$$

Поскольку $\gamma_j \geqslant \gamma_j a_j^{\oplus} a_j$ ($\mathbf{P}$-п. н.), то следует лишь установить, что

$$\mathbf{E}\gamma_j = \mathbf{E}\gamma_j a_j^{\oplus} a_j.$$

Но $\mathbf{E}\gamma_j = \mathbf{E}a_j$ и, с другой стороны,

$$\mathbf{E}\gamma_j a_j^{\oplus} a_j = \mathbf{E}\,[a_j^{\oplus} a_j \mathbf{E}(\gamma_j \mid \mathscr{F}_{j-1})] = \mathbf{E}a_j^{\oplus} a_j a_j = \mathbf{E}a_j,$$

что и доказывает (6.3).

Покажем теперь, что $S = (S_k, \mathscr{F}_k)$ — супермартингал. Действительно, имеем ($\mathbf{P}$-п. н.)

$$\mathbf{E}(S_k \mid \mathscr{F}_{k-1}) = S_{k-1}\mathbf{E}(\gamma_k a_k^{\oplus} \mid \mathscr{F}_{k-1}) = S_{k-1} a_k^{\oplus} a_k \leqslant S_{k-1}.$$

Далее, $\mathbf{E}S_1 = a_1 a_1^{\oplus} \leqslant 1$, и значит, $\mathbf{E}S_k \leqslant 1$.

Известно, что неотрицательный супермартингал сходится ($\mathbf{P}$-п. н.) к конечному пределу. Поэтому существует ($\mathbf{P}$-п. н.) предел $S_\infty \equiv \lim\limits_n S_n$ и $\mathbf{E}S_\infty \leqslant \leqslant 1$.

Заметим теперь, что $0 \leqslant A_1 = a_1 \leqslant 1$ и $A_{k+1} \leqslant A_k$ ($\mathbf{P}$-п. н.). Значит, существует предел $A_\infty \equiv \lim\limits_n A_n \geqslant 0$ и, следовательно, ($\mathbf{P}$-п. н.) существует предел $\Gamma_\infty \equiv \lim\limits_\infty \Gamma_n$ и $\Gamma_\infty = A_\infty \cdot S_\infty$.

Установим оценку (6.2).

Для любых $a>0$, $b>0$ имеем

$$\{\Gamma_\infty \geqslant a\} = \left\{\Gamma_\infty \geqslant a,\ S_\infty < \frac{a}{b}\right\} \cup \left\{\Gamma_\infty \geqslant a,\ S_\infty \geqslant \frac{a}{b}\right\} \subseteq$$

$$\subseteq \left\{\frac{a}{b} A_\infty \geqslant a\right\} \cup \left\{S_\infty \geqslant \frac{a}{b}\right\} = \{A_\infty \geqslant b\} \cup \left\{S_\infty \geqslant \frac{a}{b}\right\}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}(\Gamma_\infty \geqslant a) \leqslant \mathbf{P}(A_\infty \geqslant b) + \mathbf{P}\left(S_\infty \geqslant \frac{a}{b}\right).$$

Требуемая оценка (6.2) следует отсюда, если только заметить, что

$$\mathbf{P}\left(S_\infty \geqslant \frac{a}{b}\right) \leqslant \frac{b}{a}\,\mathbf{E}S_\infty \leqslant \frac{b}{a}.$$

2. Доказательство теоремы 2. Положим $\gamma_{nk} = \alpha_{nk}^{-1/2}$ и покажем, что

$$\widetilde{\mathbf{E}}^n(\gamma_{nk} \mid \mathscr{F}_{k-1}^n) \leqslant 1 \quad (\widetilde{\mathbf{P}}^n\text{-п. н.}), \qquad k \geqslant 1.$$

По лемме 3 ($\widetilde{\mathbf{P}}^n$-п. н.)

$$\widetilde{\mathbf{E}}^n(\alpha_{nk}^{-1/2} \mid \mathscr{F}_{k-1}^n) = I(\alpha_{n,\,k-1} < \infty)\,\mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} \mid \mathscr{F}_{k-1}^n),$$

а по лемме 4 ($\widetilde{\mathbf{P}}^n$-п. н.)

$$I(\alpha_{n,\,k-1} < \infty)\,(1 - \mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} \mid \mathscr{F}_{k-1}^n)) \geqslant 0.$$

Поэтому ($\widetilde{\mathbf{P}}^n$-п.н.) $\widetilde{\mathbf{E}}^n(\alpha_{nk}^{-1/2}\mid\mathscr{F}_{k-1}^n)\leqslant 1$, $k\geqslant 1$. Применяя лемму 11, находим, что

$$\widetilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty}^{-1/2}\geqslant a)\leqslant\frac{b}{a}+\widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\prod_{k=1}^{\infty}I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\,\mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2}\mid\mathscr{F}_{k-1}^n)\geqslant b\Big).$$

Возьмем в этом неравенстве $0<b\leqslant 1$. Тогда

$$\widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(z_{n\infty}>\frac{1}{a^2}\Big)\geqslant \tag{6.4}$$
$$\geqslant\Big(1-\frac{b}{a}\Big)-\widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\ln\,[I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\,\mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2}\mid\mathscr{F}_{k-1}^n)]\geqslant\ln b\Big).$$

Поскольку $\ln x\leqslant x-1$, $x\geqslant 0$ и, значит,

$$\ln\,[I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\,\mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2}\mid\mathscr{F}_{k-1}^n)]\leqslant I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\,\mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2}\mid\mathscr{F}_{k-1}^n)-1\leqslant$$
$$\leqslant I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\,[\mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2}\mid\mathscr{F}_{k-1}^n)-1],$$

то из (6.4) находим, что

$$\widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(z_{n\infty}>\frac{1}{a^2}\Big)\geqslant$$
$$\geqslant\Big(1-\frac{b}{a}\Big)-\widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\,[1-\mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2}\mid\mathscr{F}_{k-1}^n)]\leqslant\ln\frac{1}{b}\Big).$$

Согласно условию ($\gamma$) для любого $0<b\leqslant 1$

$$\overline{\lim_n}\,\widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\,[1-\mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2}\mid\mathscr{F}_{k-1}^n)]\leqslant\ln\frac{1}{b}\Big)=0.$$

Поэтому

$$\underline{\lim_n}\,\widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(z_{n\infty}>\frac{1}{a^2}\Big)\geqslant 1-\frac{b}{a},$$

и значит, в силу произвольности $0<b\leqslant 1$

$$\underline{\lim_n}\,\widetilde{\mathbf{P}}^n\Big(z_{n\infty}>\frac{1}{a^2}\Big)=1,$$

что в силу леммы 10 равносильно тому, что $(\widetilde{\mathbf{P}}^n)\,\triangle\,(\mathbf{P}^n)$.

3. Доказательство следствия 5. Поскольку $\mathbf{P}_k^n(z_{nk}=\infty)=0$ (свойство 5° из § 2) и $\widetilde{\mathbf{P}}_k^n\ll\mathbf{P}_k^n$, то

$$\widetilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{nk}=\infty)=\widetilde{\mathbf{P}}_k^n(\alpha_{nk}=\infty)=\widetilde{\mathbf{P}}_k^n(z_{nk}=\infty)=0$$

и (1.8) следует непосредственно из утверждения теоремы 2.

4. Доказательство теоремы 3. То, что условие ($\rho$) является достаточным (без условий ($\alpha$) и ($\delta$)), было установлено в следствии 5 к теореме 2.

Покажем теперь, что

$$(\alpha),\ (\delta),\ \ (\widetilde{\mathbf{P}}^n)\,\triangle\,(\mathbf{P}^n)\Rightarrow(\rho).$$

В силу леммы 10 это равносильно доказательству того, что

$$(\alpha),\ (\delta),\ \ \underline{\lim_n}\,\widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nk}\geqslant N)=1\quad\forall N>0\Rightarrow(\rho). \tag{6.5}$$

В соответствии с (5.12) для $N \geqslant 1$, $c \geqslant 1$

$$\{\sup_k z_{nk} \geqslant N\} \subseteq \{\sup_k |X_{nk}^c| \geqslant \ln N\} \cup \{\sup_k \alpha_{nk} \geqslant e^c\} \cup \{\inf_k \alpha_{nk} \leqslant e^{-c}\}.$$

Поэтому

$$(6.6) \qquad \overline{\lim_n} \widetilde{\mathbf{P}}^n (\sup_k |X_{nk}^c| \geqslant \ln N) \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \overline{\lim_n} \widetilde{\mathbf{P}}^n (\sup_k \alpha_{nk} \geqslant e^c) - \overline{\lim_n} \widetilde{\mathbf{P}}^n (\inf_k \alpha_{nk} \leqslant e^{-c}).$$

Отсюда в силу условий ($\alpha$), ($\delta$) находим, что для всякого $N \geqslant 1$ и $\varepsilon > 0$ найдется $c = c(\varepsilon) \geqslant 1$ такое, что

$$\overline{\lim_n} \widetilde{\mathbf{P}}^n (\sup_k |X_{nk}^c| \geqslant \ln N) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Согласно (3.17) с $N > e$

$$(6.7) \qquad \widetilde{\mathbf{P}}^n (\sup_k |X_{nk}^c| \geqslant \ln N) \leqslant \frac{2\, LA(c)}{\ln N - 1} + \widetilde{\mathbf{P}}^n (A_\infty^n + B_\infty^n \geqslant 2\, LA(c)),$$

где $A_\infty^n$ и $B_\infty^n$ определены в доказательстве леммы 8 в § 3, $L > 0$, $0 < A(c) < \infty$ определено в (5.26).

Из (6.6) и (6.7)

$$(6.8) \quad \overline{\lim_n} \widetilde{\mathbf{P}}^n (A_\infty^n + B_\infty^n \geqslant 2\, LA(c)) \geqslant 1 - \frac{2\, LA(c)}{\ln N - 1} \to 1 - \varepsilon, \qquad N \to \infty.$$

Далее, на множестве $\{\sup_k \alpha_{nk} < \infty\}$ из (5.26) находим

$$A_\infty^n + B_\infty^n = \sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}^n [\alpha_{nk} u_c (\ln \alpha_{nk}) + \alpha_{nk} u_c^2 (\ln \alpha_{nk}) \mid \mathscr{F}_{k-1}^n] =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}^n [\alpha_{nk} u_c (\ln \alpha_{nk}) + \alpha_{nk} u_c^2 (\ln \alpha_{nk}) + 1 - \alpha_{nk} \mid \mathscr{F}_{k-1}^n] \leqslant$$

$$\leqslant A(c) \sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}^n [(1 - \alpha_{nk}^{1/2})^2 \mid \mathscr{F}_{k-1}^n] = 2A(c) \sum_{k=1}^\infty [1 - \mathbf{E}^n (\alpha_{nk}^{1/2} \mid \mathscr{F}_{k-1}^n)].$$

Вместе с (6.8) и в силу ($\alpha$) отсюда следует, что

$$\overline{\lim_n} \widetilde{\mathbf{P}}^n \Big( \sum_{k=1}^\infty [1 - \mathbf{E}^n (\alpha_{nk}^{1/2} \mid \mathscr{F}_{k-1}^n)] \geqslant L \Big) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

В силу произвольности $L$ и $\varepsilon$ это доказывает, что из условий ($\alpha$), ($\delta$), $(\widetilde{\mathbf{P}}^n) \vartriangle (\mathbf{P}^n)$ вытекает условие ($\rho$). Теорема доказана.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] L. Le Cam. Locally asymptotically normal families of distributions.— Univ. of Calif. Publ. Statist., 1960, 3, p. 37—98.

[2] Дж. Русас. Контигуальность вероятностных мер.— М.: Мир, 1975.

[3] Я. Гаек, З. Шидак. Теория ранговых критериев.— М.: Наука, 1971.

[4] H. Witting, G. Nölle. Angewandte mathematische Statistik.— Stuttgart, Teubner, 1970.

[5] W. J. Hall, R. M. Loynes. On the concept of contiguity.— Ann. of Prob., 5:2, p. 278—282.

[6] J. Oosterhoff, W. R. van Zwet. A note on contiguity and Hellinger distance. Contributions to Statistics (ed. J. Jurečkova).— Dordrecht, Reidel, 1979.

[7] L. LeCam. On the asymptotic normality of estimates.— Proc. of the Symposium to Honour Jerzey Neyman (Warsaw, 1974), Warsaw Panstw. Wydamu Nauk, 1977, p. 203—217.

[8] G. K. Eagleson. An extended dichotomy theorem for sequences of pairs of Gaussian measures.— Ann. of Prob., 1981, 9:3, p. 453—459.

[9] G. K. Eagleson, R. F. Gundy. On a theorem of Kabanov, Liptser and Sirjaev.— Preprint.

[10] G. K. Eagleson, J. Memin. Sur la contiguite de deux suites de mesures; generalisation d'un theoreme de Kabanov — Liptser — Shiryayev.— Lect. Notes in Math., 1982, **920**, с. 319—337.

[11] Ю. М. Кабанов, Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. К вопросу об абсолютной непрерывности и сингулярности вероятностных мер.— Матем. сб., 1977, **104(146)**, с. 227—247.

[12] E. Lenglart. Relation de domination entre deux processus.— Ann. Inst. H. Poincare, 1977, **13**, p. 171—179.

[13] R. Rebolledo. La methode des martingales appliqueé a l'etude de la convergence en loi de processus.— M. Soc. Math. France, 1979, 62.

[14] U. Müller-Funk. On continguity and weak convergence with an application to sequential analysis.— Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, 1982.

[15] K. Behnen, G. Neuhaus. A central limit theorem under contiguous alternatives.— Ann. of Statist., 1975, 3, p. 1349—1353.

[16] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. Статистика случайных процессов.— М.: Наука, 1974.

[17] А. Н. Ширяев. Вероятность.— М.: Наука, 1980.

Институт проблем управления,
Institut für Mathematische
Stochastik der Albert-Ludwigs-Universität,
Математический институт АН СССР
им. В. А. Стеклова

Поступила в редакцию
18 июня 1982 г.

Uspekhi Mat. Nauk 37:6 (1982), 97–124 Russian Math. Surveys 37:6 (1982), 107–136

# Necessary and sufficient conditions for contiguity and entire asymptotic separation of probability measures

R.Sh. Liptser, F. Pukel'sheim, and A.N. Shiryaev

CONTENTS



## §1. Introduction. Statement of the main results

Let $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)_{n\geq 1}$ be a sequence of measurable spaces, and let $\mathbf{P}^n$ and $\widetilde{\mathbf{P}}_n$ be probability measures on $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$, $n \geq 1$.

*Definition* 1 ([1]–[6]). A sequence of probability measures $(\widetilde{\mathbf{P}}^n)_{n\geq 1}$ is said to be *contiguous* to a sequence of probability measures $(\mathbf{P}^n)_{n\geq 1}$ (notation: $(\widetilde{\mathbf{P}}^n) \lhd (\mathbf{P}^n)$) if for every sequence of measurable sets $(A^n)_{n\geq 1}$ with $A^n \in \mathcal{F}^n$

$$(1.1)\qquad \lim_n \mathbf{P}^n(A^n) = 0 \Rightarrow \lim_n \widetilde{\mathbf{P}}^n(A^n) = 0.$$

*Definition* 2 ([7]–[10]). Two sequences of probability measures $(\widetilde{\mathbf{P}}^n)_{n\geq 1}$ and $(\mathbf{P}^n)_{n\geq 1}$ are said to be *entirely asymptotically separating* (notation: $(\widetilde{\mathbf{P}}^n) \vartriangle (\mathbf{P}^n)$) if there exists a subsequence $(n')$ and measurable sets $A^{n'} \in \mathcal{F}^{n'}$ such that simultaneously $\lim_{n'} \mathbf{P}^{n'}(A^{n'}) = 0$ and $\lim_{n'} \widetilde{\mathbf{P}}^{n'}(A^{n'}) = 1$.

*Note* 1. In the special case when $(\Omega^n, \mathcal{F}^n) \equiv (\Omega, \mathcal{F})$ and $\mathbf{P}^n \equiv \mathbf{P}$, $\widetilde{\mathbf{P}}^n \equiv \widetilde{\mathbf{P}}$, that is, when the sequences of measurable spaces and probability measures in question do not depend on $n$, the property of contiguity is the same as the property of absolute continuity ($\widetilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{P}$) of $\widetilde{\mathbf{P}}$ relative to $\mathbf{P}$, and the property of entire asymptotic separation indicates the singularity ($\widetilde{\mathbf{P}} \perp \mathbf{P}$) of $\widetilde{\mathbf{P}}$ and $\mathbf{P}$.



2. Throughout what follows we assume that for every $n \geq 1$ together with the measurable spaces $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$ we are given families of $\sigma$-algebras $\mathbf{F}^n = (\mathcal{F}^n_k)_{k\geq 0}$ such that $\mathcal{F}^n_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathcal{F}^n_k \subseteq \mathcal{F}^n_{k+1} \subseteq \mathcal{F}^n$, and $\mathcal{F}^n = \sigma(\bigcup_k \mathcal{F}^n_k)$. We write $\mathbf{P}^n_k = \mathbf{P}^n \mid \mathcal{F}^n_k$ and $\widetilde{\mathbf{P}}^n_k = \widetilde{\mathbf{P}}^n \mid \mathcal{F}^n_k$ for the restrictions of the probability measures $\mathbf{P}^n$ and $\widetilde{\mathbf{P}}^n$ to the $\sigma$-algebra $\mathcal{F}^n_k$.

*Note* 2. Suppose that on $(\Omega, \mathcal{F})$ there are given two probability measures $\mathbf{P}$ and $\widetilde{\mathbf{P}}$. Let $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k\geq 0}$ be a family of $\sigma$-algebras, $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_{k+1} \subseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_k \mathcal{F}_k)$, and $\mathbf{P}_k = \mathbf{P} \mid \mathcal{F}_k$, $\widetilde{\mathbf{P}}_k = \widetilde{\mathbf{P}} \mid \mathcal{F}_k$. Then the contiguity of the family $(\widetilde{\mathbf{P}}_k)_{k\geq 0}$ to $(\mathbf{P}_k)_{k\geq 0}$, regarded on $(\Omega, \mathcal{F}_k)_{k\geq 0}$, is equivalent to $\widetilde{\mathbf{P}}$ being absolutely continuous relative to $\mathbf{P}$. In other words, in this particular case

$$(\widetilde{\mathbf{P}}_k) \lhd (\mathbf{P}_k) \Leftrightarrow \widetilde{\mathbf{P}} \ll \mathbf{P}.$$

Similarly,

$$(\widetilde{\mathbf{P}}_k) \vartriangle (\mathbf{P}_k) \Leftrightarrow \widetilde{\mathbf{P}} \perp \mathbf{P}.$$

3. To state the results of this paper and to discuss their connection with earlier results we now introduce some notation.

Let $\mathbf{Q}^n = \frac{1}{2}(\widetilde{\mathbf{P}}^n + \mathbf{P}^n)$, $\mathbf{Q}^n_k = \mathbf{Q}^n \mid \mathcal{F}^n_k \left( = \frac{1}{2}(\widetilde{\mathbf{P}}^n_k + \mathbf{P}^n_k)\right)$. For every $0 \leq a \leq \infty$ we set

$$(1.2)\qquad a^{\oplus} = \begin{cases} 0 & \text{if } a = 0 \\ a^{-1} & \text{if } 0 < a < \infty \\ 0 & \text{if } a = \infty, \end{cases} \qquad a^{\ominus} = \begin{cases} 0 & \text{if } a = 0 \\ a^{-1} & \text{if } 0 < a < \infty \\ \infty & \text{if } a = \infty, \end{cases}$$

and we write

$$\mathfrak{z}_{nk} = \frac{d\mathbf{P}^n_k}{d\mathbf{Q}^n_k}, \quad \widetilde{\mathfrak{z}}_{nk} = \frac{d\widetilde{\mathbf{P}}^n_k}{d\mathbf{Q}^n_k}$$

for the Radon-Nikodym derivatives of the measures $\mathbf{P}^n_k$ and $\widetilde{\mathbf{P}}^n_k$ relative to $\mathbf{Q}^n_k$. (Throughout what follows we only consider finite versions of the Radon-Nikodym derivatives.)

We also set (for $k \geq 1$)

$$(1.3)\qquad \beta_{nk} = \mathfrak{z}_{nk} \cdot \mathfrak{z}^{\ominus}_{n,k-1}, \quad \widetilde{\beta}_{nk} = \widetilde{\mathfrak{z}}_{nk} \cdot \widetilde{\mathfrak{z}}^{\ominus}_{n,k-1},$$

assuming that $\mathfrak{z}_{n0} = \widetilde{\mathfrak{z}}_{n0} = 1$.

A central role in what follows is played by the likelihood ratio

$$(1.4)\qquad z_{nk} = \frac{\widetilde{\mathfrak{z}}_{nk}}{\mathfrak{z}_{nk}}$$

and the quantities constructed from them

$$(1.5)\qquad \alpha_{nk} = z_{nk} \cdot z^{\ominus}_{n,k-1}, \qquad k \geq 1.$$

Observe that in (1.4) the undetermined form $\infty/\infty$ does not arise; as usual, $a/0=\infty$ for $a>0$, and in the case of $0/0$ we set $z_{nk}$ equal to an arbitrary number, for example 0, which is immaterial, because

$$Q^n(\widetilde{\mathfrak{z}}_{nk}=0,\quad \mathfrak{z}_{nk}=0)\leqslant\frac{1}{2}[\widetilde{P}^n(\widetilde{\mathfrak{z}}_{nk}=0)+P^n(\mathfrak{z}_{nk}=0)]=0.$$

Thus, $z_{nk}=\widetilde{\mathfrak{z}}_{nk}\cdot\mathfrak{z}^{\oplus}_{nk}=\widetilde{\mathfrak{z}}_{nk}\cdot\mathfrak{z}^{\ominus}_{nk}$ ($Q^n$-almost surely). Just as in (1.5), an indeterminate expression of the type $0\cdot\infty$ or $\infty\cdot 0$ can occur only with $Q^n$-probability zero, because the states 0 and $\infty$ are absorbing for $(z_{nk})_{k\geqslant 1}$, see §2.3°.(1)

4. The following theorem is one of the main results of the present paper.

*Theorem* 1. I. *For* $(\widetilde{P}^n)\lhd(P^n)$ *to hold it is necessary and sufficient that the following two conditions are satisfied*:

$$(\alpha)\qquad \lim_N\overline{\lim_n}\,\widetilde{P}^n(\sup_k\alpha_{nk}\geqslant N)=0,$$

$$(\beta)\qquad \lim_N\overline{\lim_n}\,\widetilde{P}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}E_{Q^n}[(\sqrt{\widetilde{\beta}_{nk}}-\sqrt{\beta_{nk}})^2|\mathcal{F}^n_{k-1}]\geqslant N\Big)=0,$$

*where* $E_{Q^n}$ *denotes the expectation relative to* $Q^n$.

II. *If* ($\alpha$) *holds, then* ($\beta$) *is equivalent to*

$$(\beta^*)\qquad \lim_N\overline{\lim_n}\,\widetilde{P}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}I(\alpha_{n,k-1}<\infty)[1-E^n(\sqrt{\alpha_{nk}}|\mathcal{F}^n_{k-1})]\geqslant N\Big)=0,$$

*or*

$$(\beta^{**})\qquad \lim_N\overline{\lim_n}\,\widetilde{P}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}E^n[(1-\sqrt{\alpha_{nk}})^2|\mathcal{F}^n_{k-1}]\geqslant N\Big)=0,$$

*where* $E^n$ *denotes the expectation relative to* $P^n$.

*Corollary* 1. *Suppose that* $P^n=\mu^n_1\times\mu^n_2\times\dots$, $\widetilde{P}^n=\widetilde{\mu}^n_1\times\widetilde{\mu}^n_2\times\dots$ *are direct products of probability measures on* $(\Omega^n,\mathcal{F}^n)$, *where*

$$\Omega^n=\Omega^n_1\times\Omega^n_2\times\dots,\quad \mathcal{F}^n=\mathcal{F}^n_1\otimes\mathcal{F}^n_2\otimes\dots$$

*Then in* ($\beta$) *the conditional mathematical expectations are the same as the unconditional ones*,

$$\beta_{nk}=\frac{1}{2}\,\frac{d\mu^n_k}{d(\mu^n_k+\widetilde{\mu}^n_k)},\qquad \widetilde{\beta}_{nk}=\frac{1}{2}\,\frac{d\widetilde{\mu}^n_k}{d(\mu^n_k+\widetilde{\mu}^n_k)},$$

*and*

$$E_{Q^n}(\sqrt{\widetilde{\beta}_{nk}}-\sqrt{\beta_{nk}})^2=\int(\sqrt{\widetilde{\beta}_{nk}}-\sqrt{\beta_{nk}})^2\,d\Big(\frac{\mu^n_k+\widetilde{\mu}^n_k}{2}\Big)$$

*is precisely the square of the Hellinger distance* $H(\widetilde{\mu}^n_k,\mu^n_k)$ *between the measures* $\widetilde{\mu}^n_k$ *and* $\mu^n_k$ *(for details, see §2.5)*.

(1)Henceforth $\sup\limits_m$ denotes $\sup\limits_{1\leqslant m<\infty}$ and $\lim\limits_m=\lim\limits_{m\to\infty}$.



As a special case of Theorem 1 we can derive the following results due to Oosterhoff and van Zwet [6]: for the contiguity $(\widetilde{P}^n)\lhd(P^n)$ of the family $(\widetilde{P}^n)$ relative to $(P^n)$, where each is a direct product measure, it is necessary and sufficient that

$$(\alpha)\qquad \lim_N\overline{\lim_n}\,\widetilde{P}^n\Big(\sup_k\frac{\widetilde{\beta}_{nk}}{\beta_{nk}}\geqslant N\Big)=0,$$

$$(\beta)\qquad \overline{\lim_n}\sum_{k=1}^{\infty}H^2(\widetilde{\mu}^n_k,\mu^n_k)<\infty.$$

*Corollary* 2. *Let* $P^n=\mu^n_1\times\dots\times\mu^n_n$ *and* $\widetilde{P}^n=\widetilde{\mu}^n_1\times\dots\times\widetilde{\mu}^n_n$ *be direct products of probability measures on* $(\Omega^n,\mathcal{F}^n)$, *where* $\Omega^n=R^n$, $\mathcal{F}^n=\mathcal{B}(R^n)$ *and* $\mu^n_i=\mu^n$, $\widetilde{\mu}^n_i=\widetilde{\mu}^n$. *We assume for simplicity that* $\mu^n$ *and* $\widetilde{\mu}^n$ *have densities* $p^n(x)$ *and* $\widetilde{p}^n(x)$ *relative to Lebesgue measure. Then in the associated triangular scheme of series corresponding to the case of independent and identically distributed random variables, for the relation* $(\widetilde{P}^n)\lhd(P^n)$ *to hold it is necessary and sufficient that*

$$\lim_N\overline{\lim_n}\,n\widetilde{\mu}^n\Big\{x:\frac{\widetilde{p}^n(x)}{p^n(x)}\geqslant N\Big\}=0$$

*and*

$$\overline{\lim_n}\,n\int_{-\infty}^{\infty}(\sqrt{\widetilde{p}^n(x)}-\sqrt{p^n(x)})^2\,dx<\infty.$$

*Corollary* 3. *Suppose that for every* $n\geqslant 1$ *the measures* $\widetilde{P}^n$ *are locally absolutely continuous relative to the* $P^n$ *(notation:* $\widetilde{P}^n\overset{\text{loc}}{\ll}P^n$*), that is,*

$$\widetilde{P}^n_k\ll P^n_k,\qquad k\geqslant 1.$$

*Under this assumption* $\widetilde{P}^n(\alpha_{n,k-1}<\infty)=1$, *and Theorem* 1 *includes the results of Eagleson and Gundy* [9] *and Eagleson and Mémin* [10] *that condition* ($\alpha$) *and the condition*

$$(1.6)\qquad \lim_N\overline{\lim_n}\,\widetilde{P}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}E^n(1-\sqrt{\alpha_{nk}}|\mathcal{F}^n_{k-1})\geqslant N\Big)=0$$

*are sufficient for* $(\widetilde{P}^n)\lhd(P^n)$.

*Corollary* 4. *According to Note* 2 *absolute continuity* $\widetilde{P}\ll P$ *is equivalent to contiguity* $(\widetilde{P}_k)\lhd(P_k)$, *provided that the measurable space* $(\Omega,\mathcal{F})$ *is equipped with a filtration* $F=(\mathcal{F}_k)_{k\geqslant1}$, $\mathcal{F}=\sigma(\bigcup\mathcal{F}_k)$, *and that* $P_k=P\,|\,\mathcal{F}_k$ *and* $\widetilde{P}_k=\widetilde{P}\,|\,\mathcal{F}_k$ *are the restrictions of measures* $P$ *and* $\widetilde{P}$.

Let us assume that $\widetilde{P}\overset{\text{loc}}{\ll}P$. In this case the condition ($\alpha$) has the form

$$\widetilde{P}(\sup_k\alpha_k<\infty)=1$$

with $\alpha_k=z_k\cdot z^{\ominus}_{k-1}$, $z_k=d\widetilde{P}_k/dP_k$ and holds automatically (for details see §2.1,5°.

Hence Theorem 1 includes as a special case the following generalization of a result of Kabanov, Liptser, and Shiryaev [11]: *if* $\tilde{\mathrm{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathrm{P}$, *then*

$$(1.7)\qquad \tilde{\mathrm{P}} \ll \mathrm{P} \Leftrightarrow \tilde{\mathrm{P}}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}(1-\sqrt{\alpha_k}\,|\mathcal{F}_{k-1}) < \infty\Big) = 1.$$

**5.** In the following two theorems we give necessary and sufficient conditions for entire asymptotic separation of two families of measures $(\tilde{\mathrm{P}}^n)$ and $(\mathrm{P}^n)$.

*Theorem* 2. *Suppose that*

$$(\gamma)\qquad \overline{\lim_n}\, \tilde{\mathrm{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\,[1-\mathrm{E}^n(\sqrt{\alpha_{kn}}\,|\mathcal{F}^n_{k-1})] \geqslant N\Big) = 1 \quad \textit{for all} > 0.$$

*Then* $(\tilde{\mathrm{P}}^n) \triangle (\mathrm{P}^n)$.

*Corollary* 5. *If* $\tilde{\mathrm{P}}^n \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathrm{P}^n, n \geqslant 1$, *then* $\tilde{\mathrm{P}}^n(\alpha_{n,k-1} < \infty) = 1$ *and Theorem* 2 *includes the following results from* [9] *and* [10]:

$$(1.8)\qquad \overline{\lim_n}\, \tilde{\mathrm{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} [1-\mathrm{E}^n(\sqrt{\alpha_{nk}}\,|\mathcal{F}^n_{k-1})] \geqslant N\Big) = 1 \textit{ for all } N > 0 \Rightarrow (\tilde{\mathrm{P}}^n) \triangle (\mathrm{P}^n).$$

In Theorem 3 we give condition for the reverse implication to (1.8) to hold.

*Theorem* 3. *Suppose that* $\tilde{\mathrm{P}}^n \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathrm{P}^n$, $n \geqslant 1$, *and that*

$$(\alpha)\qquad \lim_N \overline{\lim_n}\, \tilde{\mathrm{P}}^n(\sup_k \alpha_{nk} \geqslant N) = 0,$$

$$(\delta)\qquad \lim_N \overline{\lim_n}\, \tilde{\mathrm{P}}^n\Big(\inf_k \alpha_{nk} \leqslant \frac{1}{N}\Big) = 0.$$

*Then the condition*

$$(\rho)\qquad \overline{\lim_n}\, \tilde{\mathrm{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} [1-\mathrm{E}^n(\sqrt{\alpha_{nk}}\,|\mathcal{F}^n_{k-1})] \geqslant N\Big) = 1 \quad \textit{for all } N > 0$$

*is necessary and sufficient for* $(\tilde{\mathrm{P}}^n) \triangle (\mathrm{P}^n)$ *to hold.*

Theorems 1 and 3 have the following immediate corollaries.

*Corollary* 6. *Suppose that* $\tilde{\mathrm{P}}^n \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathrm{P}^n$, $n \geqslant 1$, *and that the conditions* $(\alpha)$ *and* $(\delta)$ *are satisfied. Then*

$$(1.9)\qquad \begin{cases} (\tilde{\mathrm{P}}^n) \triangleleft (\mathrm{P}^n) \Leftrightarrow \lim\limits_N \overline{\lim\limits_n}\, \tilde{\mathrm{P}}^n\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}^n(1-\sqrt{\alpha_{nk}}\,|\mathcal{F}^n_{k-1}) \geqslant N\Big) = 0, \\ (\tilde{\mathrm{P}}^n) \triangle (\mathrm{P}^n) \Leftrightarrow \overline{\lim\limits_n}\, \tilde{\mathrm{P}}^n\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}^n(1-\sqrt{\alpha_{nk}}\,|\mathcal{F}^n_{k-1}) \geqslant N\Big) = 1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{for all } N > 0. \end{cases}$$

In particular, in the situation of Note 2 the conditions $(\alpha)$ and $(\delta)$ take the form

$$\tilde{\mathrm{P}}(\sup_k \alpha_k < \infty) = 1, \quad \tilde{\mathrm{P}}(\inf_k \alpha_k = 0) = 0$$



and follow from $(\beta^{**})$ and $(\rho)$. Therefore, (1.9) leads to the following result of [11]: *if* $\mathrm{P} \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathrm{P}$, *then*

$$(1.10)\qquad \begin{cases} \tilde{\mathrm{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathrm{P} \Leftrightarrow \tilde{\mathrm{P}}\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}(1-\sqrt{\alpha_k}\,|\mathcal{F}_{k-1}) < \infty\Big) = 1, \\ \tilde{\mathrm{P}} \perp \mathrm{P} \Leftrightarrow \tilde{\mathrm{P}}\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}(1-\sqrt{\alpha_k}\,|\mathcal{F}_{k-1}) = \infty\Big) = 1. \end{cases}$$

*Corollary* 7. *Suppose that we are in the situation of Corollary* 1 (*direct product of measures*) *and that*

$$\tilde{\mathrm{P}}^n \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathrm{P}^n, \qquad n \geqslant 1,$$

$$(1.11)\qquad \begin{cases} (\alpha)\quad \lim\limits_N \overline{\lim\limits_n}\, \tilde{\mathrm{P}}^n\Big(\sup\limits_k \dfrac{\tilde{\beta}_{nk}}{\beta_{nk}} \geqslant N\Big) = 0, \\ (\delta)\quad \lim\limits_N \overline{\lim\limits_n}\, \tilde{\mathrm{P}}^n\Big(\inf\limits_k \dfrac{\tilde{\beta}_{nk}}{\beta_{nk}} \leqslant \dfrac{1}{N}\Big) = 0. \end{cases}$$

*Then*

$$(1.12)\qquad \begin{cases} (\tilde{\mathrm{P}}^n) \triangleleft (\mathrm{P}^n) \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} H^2(\tilde{\mu}^n_k, \mu^n_k) < \infty, \\ (\tilde{\mathrm{P}}^n) \triangle (\mathrm{P}^n) \Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} H^2(\tilde{\mu}^n_k, \mu^n_k) = \infty. \end{cases}$$

Thus, under the assumptions (1.11) we have the following alternative:

$$\text{either } (\tilde{\mathrm{P}}^n) \triangleleft (\mathrm{P}^n), \text{ or } (\tilde{\mathrm{P}}^n) \triangle (\mathrm{P}^n).$$

(compare with the Kakutani alternative: [11]).

**6.** We now give a brief outline of the idea of the proofs of Theorems 1–3, and to this end it is useful to recall the following definition.

*Definition* 3. A family $(\xi^n)_{n\geqslant 1}$ of random variables $\xi^n$ defined on $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathrm{P}^n)$, $n \geqslant 1$, is said to be *asymptotically tight* under a family of measures $(\mathrm{P}^n)_{n\geqslant 1}$ (notation: $(\xi^n, \mathrm{P}^n)$-as. tight) if

$$(1.13)\qquad \lim_N \overline{\lim_n}\, \mathrm{P}^n(|\xi^n| \geqslant N) = 0.$$

According to Lemma 9 (below)

$$(1.14)\qquad (\tilde{\mathrm{P}}^n) \triangleleft (\mathrm{P}^n) \Leftrightarrow (\sup_k z_{nk}, \tilde{\mathrm{P}}^n)\text{-as. tight}.$$

Thus, the proof of Theorem 1 in §5 reduces to a verification that asymptotic tightness of $(\sup_k z_{nk})$ under $(\tilde{\mathrm{P}}^n)$ is equivalent to the conditions $(\alpha)$ and $(\beta)$ which can also be expressed in terms of asymptotic tightness of the corresponding families. Next, by Lemma 10,

$$(1.15)\qquad (\tilde{\mathrm{P}}^n) \triangle (\mathrm{P}^n) \Leftrightarrow \overline{\lim_n}\, \tilde{\mathrm{P}}^n(\sup_n z_{nk} \geqslant N) = 1 \quad \text{for all } N > 0.$$

Thus, the proof of Theorem 2 reduces to showing that

$$(\gamma) \Rightarrow \overline{\lim_n}\, \tilde{\mathrm{P}}^n (\sup_k z_{nk} \geqslant N) = 1 \text{ for all } N > 0.$$

Theorems 2 and 3 are proved in §6.

In §2 we derive the Lebesgue decomposition and a number of useful related results. In particular, we establish in Lemma 3 a formula for the transformation of a conditional mathematical expectation under a non-absolutely continuous change of probability measures. In §3 we give conditions (in predictable terms) for asymptotic tightness of families of submartingales. In §4 we give a number of characterizations of contiguity and entire asymptotic separation.

## §2. The Lebesgue decomposition and Hellinger distance

1. Let $(\Omega, \mathscr{F})$ be a measurable space equipped with a filtration $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_k)_{k \geqslant 1}$ of $\sigma$-algebras such that $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\infty \equiv \sigma(\bigcup_k \mathscr{F}_k)$; let $\mathrm{P}$ and $\tilde{\mathrm{P}}$ be two probability measures and $\mathrm{P}_k = \mathrm{P} \mid \mathscr{F}_k$, $\tilde{\mathrm{P}}_k = \tilde{\mathrm{P}} \mid \mathscr{F}_k$ their restrictions to $\mathscr{F}_k$.

We write $\mathrm{Q} = \frac{1}{2}(\mathrm{P} + \tilde{\mathrm{P}})$, $\mathrm{Q}_k = \mathrm{Q} \mid \mathscr{F}_k$. Let

$$\mathfrak{z}_k = \frac{d\mathrm{P}_k}{d\mathrm{Q}_k}, \quad \tilde{\mathfrak{z}}_k = \frac{d\tilde{\mathrm{P}}_k}{d\mathrm{Q}_k}$$

be finite versions of the corresponding Radon-Nikodym derivatives, and let

$$z_k = \frac{\tilde{\mathfrak{z}}_k}{\mathfrak{z}_k}$$

be the likelihood ratio (in the case of an indeterminacy 0/0 we define $z_k = 0$; notice, however, that $\mathrm{Q}(\tilde{\mathfrak{z}}_k = 0,\ \mathfrak{z}_k = 0) = 0$).

Next we list some basic properties of the sequences $(\mathfrak{z}_k)$, $(\tilde{\mathfrak{z}}_k)$, and $(z_k)$, $k \geqslant 1$.

1°. Relative to Q the families $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_k, \mathscr{F}_k)$ and $\tilde{\mathfrak{z}} = (\tilde{\mathfrak{z}}_k, \mathscr{F}_k)$ are non-negative uniformly integrable martingales. It follows that Q-, $\tilde{\mathrm{P}}$-, and P-a.s.

$$\mathfrak{z}_\infty \equiv \lim \mathfrak{z}_k, \quad \tilde{\mathfrak{z}}_\infty \equiv \lim \tilde{\mathfrak{z}}_k, \quad \sup_k \mathfrak{z}_k + \sup_k \tilde{\mathfrak{z}}_k < \infty$$

and

$$\mathfrak{z}_\infty = \frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{Q}}, \quad \tilde{\mathfrak{z}}_\infty = \frac{d\tilde{\mathrm{P}}}{d\mathrm{Q}}.$$

2°. $\mathrm{P}(\inf_k \mathfrak{z}_k > 0) = 1$, $\tilde{\mathrm{P}}(\inf_k \tilde{\mathfrak{z}}_k > 0) = 1$. For let $T = \inf\{k \geqslant 0\colon \mathfrak{z}_k = 0\}$, setting $T = \infty$ when $\mathfrak{z}_k > 0$ for every $k \geqslant 0$. Then

$$\mathrm{P}(\inf_k \mathfrak{z}_k = 0) = \int_{\{\inf_k \mathfrak{z}_k = 0\}} \mathfrak{z}_\infty \, d\mathrm{Q} =$$

$$= \int_{\{\mathfrak{z}_T = 0,\, T < \infty\}} \mathfrak{z}_\infty \, d\mathrm{Q} + \int_{\{\mathfrak{z}_\infty = 0,\, T = \infty\}} \mathfrak{z}_\infty \, d\mathrm{Q} = \int_{\{\mathfrak{z}_T = 0,\, T < \infty\}} \mathfrak{z}_T \, d\mathrm{Q} = 0.$$



3°. Since the value 0 is an absorbing state (Q-a.s.) for the martingales $\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}_k, \mathscr{F}_k)$ and $\tilde{\mathfrak{z}} = (\tilde{\mathfrak{z}}_k, \mathscr{F}_k)$, the values 0 and $\infty$ are absorbing states (Q-, P-, and $\tilde{\mathrm{P}}$-a.s.) for the submartingale $(z_k)_{k \geqslant 1}$.

4°. The limit

$$z_\infty \equiv \lim z_k$$

exists Q-, P-, and $\tilde{\mathrm{P}}$-a.s.

5°. The following equalities hold:

$$\mathrm{P}(\sup_k z_k < \infty) = 1, \quad \tilde{\mathrm{P}}(\inf_k z_k > 0) = 1,$$

and if $\tilde{\mathrm{P}} \ll \mathrm{P}$, then

$$\tilde{\mathrm{P}}(\sup_k z_k < \infty) = 1.$$

For

$$\tilde{\mathrm{P}}(\sup_k z_k < \infty) \geqslant \tilde{\mathrm{P}}\left(\frac{\sup \tilde{\mathfrak{z}}_k}{\inf \mathfrak{z}_k} < \infty\right) \geqslant \tilde{\mathrm{P}}(\sup_k \tilde{\mathfrak{z}}_k < \infty,\ \inf_k \mathfrak{z}_k > 0) = 1$$

and

$$\tilde{\mathrm{P}}(\inf_k z_k > 0) = \tilde{\mathrm{P}}(\inf_k \tilde{\mathfrak{z}}_k > 0) = 1.$$

2. *Lemma* 1 (The Lebesgue decomposition). *Let $T$ be a Markov time (relative to $\mathbf{F} = (\mathscr{F}_k)_{k \geqslant 1}$). Then for every set $A \in \mathscr{F}_T$*

$$\tilde{\mathrm{P}}(A) = \int_A z_T \, d\mathrm{P} + \tilde{\mathrm{P}}(A \cap \{z_T = \infty\}). \tag{2.1}$$

*Proof* (see [11]). Since

$$1 = \mathfrak{z}_T^{\oplus} \cdot \mathfrak{z}_T + (1 - \mathfrak{z}_T^{\oplus} \mathfrak{z}_T),$$

for every set $A \in \mathscr{F}_T$

$$\tilde{\mathrm{P}}(A) = \int_A \tilde{\mathfrak{z}}_\infty \, d\mathrm{Q} = \int_A \tilde{\mathfrak{z}}_T \, d\mathrm{Q} = \int_A \tilde{\mathfrak{z}}_T \,[\mathfrak{z}_T^{\oplus} \mathfrak{z}_T + (1 - \mathfrak{z}_T^{\oplus} \mathfrak{z}_T)]\, d\mathrm{Q} = \tag{2.2}$$

$$= \int_A \tilde{\mathfrak{z}}_T \mathfrak{z}_T^{\oplus} \mathfrak{z}_\infty \, d\mathrm{Q} + \int_A \tilde{\mathfrak{z}}_T (1 - \mathfrak{z}_T^{\oplus} \mathfrak{z}_T)\, d\mathrm{Q} = \int_A \tilde{\mathfrak{z}}_T \mathfrak{z}_T^{\oplus} \, d\mathrm{P} + \int_A (1 - \mathfrak{z}_T^{\oplus} \mathfrak{z}_T)\, d\tilde{\mathrm{P}}.$$

Here (see 2°)

$$\tilde{\mathfrak{z}}_T \mathfrak{z}_T^{\oplus} = \frac{\tilde{\mathfrak{z}}_T}{\mathfrak{z}_T} \ (\mathrm{P}\text{-a.s.}) \tag{2.3}$$

and

$$\int_A (1 - \mathfrak{z}_T^{\oplus} \mathfrak{z}_T)\, d\tilde{\mathrm{P}} = \tilde{\mathrm{P}}(A, \mathfrak{z}_T = 0) = \tilde{\mathrm{P}}\left(A, \frac{\tilde{\mathfrak{z}}_T}{\mathfrak{z}_T} = \infty\right), \tag{2.4}$$

since $\tilde{\mathrm{P}}(\inf_k \tilde{\mathfrak{z}}_k > 0) = 1$.

The decomposition (2.1) now follows from (2.2)–(2.4).

*Corollary* 1. *Let $\eta$ be a non-negative $\mathscr{F}_T$-measurable random variable with $\widetilde{\mathrm{E}}\eta < \infty$ (where $\widetilde{\mathrm{E}}$ denotes the expectation relative to $\widetilde{\mathrm{P}}$). Then*

$$(2.5) \qquad \widetilde{\mathrm{E}}\eta = \mathrm{E}\eta z_T + \widetilde{\mathrm{E}}\eta I(z_T = \infty).$$

*Corollary* 2. *Let $\eta$ be a non-negative $\mathscr{F}_T$-measurable random variable such that $\eta = 0$ (P-a.s.). Then*

$$(2.6) \qquad \eta I(z_T < \infty) = 0 \quad (\widetilde{\mathrm{P}}\text{-a.s.}).$$

3. ***Lemma* 2.** *For every $b > 0$*

$$(2.7) \qquad \widetilde{\mathrm{P}}(\inf_k z_k \leqslant b) \leqslant b, \quad \mathrm{P}(\sup_k z_k \geqslant b) \leqslant \frac{1}{b}.$$

*Proof.* Let $T = \inf\{k\colon z_k \leqslant b\}$, taking $T = \infty$ if $z_k > b$ for all $k$. Then $\{\inf z_k \leqslant b\} = \{z_T \leqslant b\}$. By (2.1)

$$\widetilde{\mathrm{P}}(\inf z_k \leqslant b) = \int_{\{z_T \leqslant b\}} z_T \, d\mathrm{P} + \widetilde{\mathrm{P}}(z_T \leqslant b, \ z_T = \infty) \leqslant b.$$

Now let $S = \inf\{k\colon z_k \geqslant b\}$ with $S = \infty$ if $z_k < b$ for all $k$. Then $\{\sup z_k \geqslant b\} = \{z_S \geqslant b\}$, and again by (2.1)

$$1 \geqslant \widetilde{\mathrm{P}}(\sup z_k \geqslant b) = \widetilde{\mathrm{P}}(z_S \geqslant b) = \int_{z_S \geqslant b} z_S \, d\mathrm{P} + \mathrm{P}(z_S \geqslant b, \ z_S = \infty) \geqslant b\mathrm{P}(z_S \geqslant b) = b\mathrm{P}(\sup z_k \geqslant b).$$

4. We write $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = z_1$, $\alpha_k = z_k \cdot z_{k-1}^{\ominus}$ for $k \geqslant 2$. Then by 3°

$$(2.8) \qquad z_k = \prod_{j=1}^{k} \alpha_j.$$

The following lemma gives an important formula for the computation of conditional expectations under a non-absolutely continuous change of probability measures.

*Lemma* 3. *Let $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ and let $\eta$ be a non-negative $\mathscr{F}_k$-measurable $\widetilde{\mathrm{P}}$-integrable random variable, $k \geqslant 1$. Then ($\widetilde{\mathrm{P}}$-a.s.)*

$$(2.9) \quad \widetilde{\mathrm{E}}(\eta | \mathscr{F}_{k-1}) = I(\alpha_{k-1} < \infty)\, \mathrm{E}(\eta\alpha_k | \mathscr{F}_{k-1}) + \widetilde{\mathrm{E}}(\eta I(\alpha_k = \infty) | \mathscr{F}_{k-1}).$$

*Proof.* Observe that for $k = 1$ (2.9) reduces to (2.5).

Suppose now, that $k \geqslant 2$. It is enough to prove (2.9) for bounded non-negative random variables $\eta$. Under this hypothesis, we denote the right-hand side of (2.9) by $\xi$. Then, to verify (2.9) we must establish that for every set $A \in \mathscr{F}_{k-1}$

$$(2.10) \qquad \widetilde{\mathrm{E}}\eta I(A) = \widetilde{\mathrm{E}}\xi I(A).$$



But from (2.8) and 3° it follows that ($\widetilde{\mathrm{P}}$-a.s.) for every $k \geqslant 1$

$$(2.11) \qquad \{\alpha_k < \infty\} = \{z_k < \infty\}.$$

Therefore,

$$(2.12) \quad \widetilde{\mathrm{E}}\xi I(A) = \widetilde{\mathrm{E}} I(z_{k-1} < \infty)\, \mathrm{E}(\eta\alpha_k | \mathscr{F}_{k-1}) I(A) + \widetilde{\mathrm{E}}\eta I(z_k = \infty) I(A).$$

Utilizing (2.5),

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{E}} I(z_{k-1} < \infty)\, \mathrm{E}(\eta\alpha_k | \mathscr{F}_{k-1}) I(A) &= \mathrm{E}(I(z_{k-1} < \infty)\, \mathrm{E}(\eta\alpha_k | \mathscr{F}_{k-1}) I(A) z_{k-1}) + \\ &+ \widetilde{\mathrm{E}}(I(z_{k-1} < \infty)\, \mathrm{E}(\eta\alpha_k | \mathscr{F}_{k-1}) \cdot I(A) \cdot I(z_{k-1} = \infty)) = \\ &= \mathrm{E}(I(z_{k-1} < \infty)\, \eta\alpha_k I(A) z_{k-1}) = \mathrm{E}(I(z_{k-1} < \infty)\, \eta z_k z_{k-1}^{\ominus} I(A) z_{k-1}).\end{aligned}$$

From 3° and 5° we find that (P-a.s.)

$$I(z_{k-1} < \infty)\, z_k z_{k-1}^{\ominus} z_{k-1} = I(z_{k-1} < \infty)\, z_k z_{k-1}^{\oplus} z_{k-1} = z_k.$$

Therefore,

$$\widetilde{\mathrm{E}}(I(z_{k-1} < \infty)\, \mathrm{E}(\eta\alpha_k | \mathscr{F}_{k-1}) I(A)) = \mathrm{E}\eta z_k I(A),$$

hence,

$$(2.13) \qquad \widetilde{\mathrm{E}}\xi I(A) = \mathrm{E}\eta z_k I(A) + \widetilde{\mathrm{E}}\eta I(z_k = \infty) I(A).$$

According to (2.5)

$$\mathrm{E}\eta z_k I(A) + \widetilde{\mathrm{E}}\eta I(z_k = \infty) I(A) = \widetilde{\mathrm{E}}\eta I(A),$$

and this, together with (2.13), establishes the required equality (2.10).

*Corollary* 1. *Suppose that $\widetilde{\mathrm{P}} \overset{\mathrm{loc}}{\ll} \mathrm{P}$, that is, $\widetilde{\mathrm{P}}_k \ll \mathrm{P}_k$, $k \geqslant 1$. Then $\widetilde{\mathrm{P}}(\alpha_k < \infty) = \widetilde{\mathrm{P}}(z_k < \infty) = 1$ and ($\widetilde{\mathrm{P}}$-a.s.)*

$$(2.14) \qquad \widetilde{\mathrm{E}}(\eta | \mathscr{F}_{k-1}) = \mathrm{E}(\eta\alpha_k | \mathscr{F}_{k-1}), \qquad k \geqslant 1.$$

(*see Lemma* 6.6 *in* [16]).

*Corollary* 2. *We set* (see (1.3)) $\beta_0 = \widetilde{\beta}_0 = 1$, $\beta_k = \mathfrak{z}_k \cdot \mathfrak{z}_{k-1}^{\ominus}$, $\widetilde{\beta}_k = \widetilde{\mathfrak{z}}_k \cdot \widetilde{\mathfrak{z}}_{k-1}^{\ominus}$. *Then* 0 *is* (Q-, P-, *and* $\widetilde{\mathrm{P}}$-*a.s.*) *an absorbing state for* $(\mathfrak{z}_k)$ *and* $(\widetilde{\mathfrak{z}}_k)$, *and*

$$(2.15) \qquad \mathfrak{z}_k = \prod_{j=1}^{k} \beta_j, \quad \widetilde{\mathfrak{z}}_k = \prod_{j=1}^{k} \widetilde{\beta}_j.$$

*From* (2.14) *it follows that*

$$(2.16) \qquad \mathrm{E}(\eta | \mathscr{F}_{k-1}) = \mathrm{E}_Q(\eta\beta_k | \mathscr{F}_{k-1}) \qquad (\text{P-a.s.})$$

*and*

$$(2.17) \qquad \widetilde{\mathrm{E}}(\eta | \mathscr{F}_{k-1}) = \mathrm{E}_Q(\eta\widetilde{\beta}_k | \mathscr{F}_{k-1}) \qquad (\widetilde{\mathrm{P}}\text{-a.s.}).$$

5. Let $\mu$ and $\widetilde{\mu}$ be two probability measures on the measurable space. Then the Hellinger distance between $\mu$ and $\widetilde{\mu}$ is the quantity

$$(2.18) \qquad H(\mu, \widetilde{\mu}) \equiv [\mathrm{E}_\nu (\sqrt{\beta} - \sqrt{\widetilde{\beta}})^2]^{1/2},$$

where $\nu$ is a measure such that $\mu+\widetilde{\mu} \ll \nu$, $\beta = d\mu/d\nu$, $\widetilde{\beta} = d\widetilde{\mu}/d\nu$ and $E_\nu$ are the expectations relative to $\nu$. The quantity $H(\mu, \widetilde{\mu})$ does not depend on the choice of $\nu$, which dominates $\mu+\widetilde{\mu}$, and it is clear that

$$H^2(\mu, \widetilde{\mu}) = 2\left(1 - \int \sqrt{(\beta\widetilde{\beta})}\, d\nu\right). \tag{2.19}$$

Next we consider two probability measures $\mathbf{P}$ and $\widetilde{\mathbf{P}}$ on a measurable space $(\Omega, \mathcal{F})$. If $\mathbf{P}$ and $\widetilde{\mathbf{P}}$ are direct product measures

$$\mathbf{P} = \mu_1 \times \mu_2 \times \ldots, \quad \widetilde{\mathbf{P}} = \widetilde{\mu}_1 \times \widetilde{\mu}_2 \times \ldots \tag{2.20}$$

then the Hellinger distance $H(\mu_k, \widetilde{\mu}_k)$ of the marginal measures $\mu_k$ and $\widetilde{\mu}_k$ can sometimes be used successfully to describe properties of $\mathbf{P}$ and $\widetilde{\mathbf{P}}$ (see, for example, [6] and [15]).

When $\mathbf{P}$ and $\widetilde{\mathbf{P}}$ are not necessarily direct product measures on $(\Omega, \mathcal{F})$ (equipped with a filtration $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$, $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup \mathcal{F}_n)$), then the corresponding role is played by the so-called conditional Hellinger distance

$$H_k \equiv \mathbf{E}_\mathbf{Q}[(\sqrt{\beta_k} - \sqrt{\widetilde{\beta}_k})^2 | \mathcal{F}_{k-1}]^{1/2}, \tag{2.21}$$

where $\beta_k$ and $\widetilde{\beta}_k$ are defined in (2.15), and $\mathbf{Q}$ is a measure dominating $\mathbf{P}+\widetilde{\mathbf{P}}$ (for instance, $\mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\mathbf{P}+\widetilde{\mathbf{P}})$), $k \geq 1$.

The following lemma is the key to the proof of Theorem 1.II.

*Lemma* 4. *For every $k \geq 1$ we have ($\widetilde{\mathbf{P}}$-a.s.)*

$$\frac{1}{2} I(\alpha_{k-1} < \infty) H_k^2 = I(\alpha_{k-1} < \infty)\left(1 - \mathbf{E}(\sqrt{\alpha_k} | \mathcal{F}_{k-1})\right). \tag{2.22}$$

*Proof.* Let $k = 1$. Then $\alpha_0 = 1$ and $\mathbf{Q}$-a.s.

$$H_1^2 = \mathbf{E}_\mathbf{Q}(\sqrt{\mathfrak{z}_1} - \sqrt{\widetilde{\mathfrak{z}}_1})^2 = 2\quad (1 - \mathbf{E}_\mathbf{Q}\sqrt{(\mathfrak{z}_1\widetilde{\mathfrak{z}}_1)}).$$

On the other hand, $\alpha_1 = z_1$, $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ and

$$\mathbf{E}(\sqrt{\alpha_1}|\mathcal{F}_0) = \mathbf{E}\sqrt{z_1} = \mathbf{E}_\mathbf{Q}\left(\frac{\widetilde{\mathfrak{z}}_1}{\mathfrak{z}_1}\right)^{1/2} \cdot \mathfrak{z}_1 = \mathbf{E}_\mathbf{Q}\sqrt{(\mathfrak{z}_1\widetilde{\mathfrak{z}}_1)}.$$

Hence, for $k = 1$ (2.22) obviously follows.

Now let $k > 1$. Since $\{\alpha_{k-1} < \infty\} = \{z_{k-1} < \infty\}$ ($\widetilde{\mathbf{P}}$-a.s.), we see that

$$\{\alpha_{k-1} < \infty\} = \left\{\frac{\widetilde{\mathfrak{z}}_{k-1}}{\mathfrak{z}_{k-1}} < \infty\right\} = \{\mathfrak{z}_{k-1} > 0\} \quad (\widetilde{\mathbf{P}}\text{-a.s.}).$$

Therefore, ($\widetilde{\mathbf{P}}$-a.s.)

$$\frac{1}{2} I(\alpha_{k-1} < \infty) H_k^2 = \tag{2.23}$$

$$= \frac{1}{2} I(\mathfrak{z}_{k-1} > 0) I(z_{k-1} < \infty) \cdot \mathbf{E}_\mathbf{Q}(\beta_k + \widetilde{\beta}_k - 2\beta_k^{1/2}\widetilde{\beta}_k^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}).$$

By Corollary 2 to Lemma 3

$$\mathbf{E}_\mathbf{Q}(\beta_k|\mathcal{F}_{k-1}) = \mathbf{E}(1|\mathcal{F}_{k-1}) = 1 \quad (\mathbf{P}\text{-a.s.}),$$

$$\mathbf{E}_\mathbf{Q}(\widetilde{\beta}_k|\mathcal{F}_{k-1}) = \widetilde{\mathbf{E}}(1|\mathcal{F}_{k-1}) = 1 \quad (\widetilde{\mathbf{P}}\text{-a.s.}).$$



From Corollary 2 to Lemma 1 ($\widetilde{\mathbf{P}}$-a.s.)

$$I(z_{k-1} < \infty)\, \mathbf{E}(1|\mathcal{F}_{k-1}) = I(z_{k-1} < \infty) = I(\alpha_{k-1} < \infty) = I(\mathfrak{z}_{k-1} > 0).$$

Hence and from (2.23) we find that ($\widetilde{\mathbf{P}}$-a.s.)

$$\frac{1}{2} I(\alpha_{k-1} < \infty) H_k^2 = I(\mathfrak{z}_{k-1} > 0)(1 - \mathbf{E}_\mathbf{Q}(\sqrt{(\beta_k\widetilde{\beta}_k)}\, | \mathcal{F}_{k-1})). \tag{2.24}$$

On the other hand, by Corollary 2 to Lemma 3 and Corollary 2 to Lemma 1

$$I(\alpha_{k-1} < \infty)\, \mathbf{E}(\alpha_k^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}) = I(\mathfrak{z}_{k-1} > 0)\, \mathbf{E}_\mathbf{Q}(\alpha_k^{1/2}\beta_k | \mathcal{F}_{k-1}) = \tag{2.25}$$

$$= I(\mathfrak{z}_{k-1} > 0)\, \mathbf{E}_\mathbf{Q}([\widetilde{\mathfrak{z}}_k \mathfrak{z}_k^{-1} (\widetilde{\mathfrak{z}}_{k-1} \cdot \mathfrak{z}_{k-1}^{-1})^{\ominus}]^{1/2}\, \mathfrak{z}_k \cdot \mathfrak{z}_{k-1}^{\ominus} | \mathcal{F}_{k-1}) =$$

$$= \mathbf{E}_\mathbf{Q}(I(\mathfrak{z}_{k-1} > 0)\, [\widetilde{\mathfrak{z}}_k \mathfrak{z}_k^{-1} (\widetilde{\mathfrak{z}}_{k-1} \cdot \mathfrak{z}_{k-1}^{-1})^{\ominus}]^{1/2}\, \mathfrak{z}_k \cdot \mathfrak{z}_{k-1}^{\ominus} | \mathcal{F}_{k-1}) =$$

$$= \mathbf{E}_\mathbf{Q}(I(\mathfrak{z}_{k-1} > 0)\, [\widetilde{\mathfrak{z}}_k \mathfrak{z}_k (\widetilde{\mathfrak{z}}_{k-1} \cdot \mathfrak{z}_{k-1}^{-1})^{\oplus} (\mathfrak{z}_{k-1}^2)^{\oplus}]^{1/2} | \mathcal{F}_{k-1}) =$$

$$= I(\mathfrak{z}_{k-1} > 0)\, \mathbf{E}_\mathbf{Q}[\sqrt{(\beta_k\widetilde{\beta}_k)}\, | \mathcal{F}_{k-1}].$$

From (2.24) and (2.25) we now obtain the required equality (2.22).

## §3. Asymptotic tightness of submartingales

1. We assume that the probability spaces $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbf{P}^n)_{n\geq 1}$, are equipped with filtrations $\mathbf{F}^n = (\mathcal{F}_k^n)_{k\geq 0}$, $\mathcal{F}_k^n \subseteq \mathcal{F}_{k+1}^n \subseteq \mathcal{F}^n$, $\mathcal{F}^n = \sigma(\bigcup \mathcal{F}_k^n)$, $\mathcal{F}_0^n = \{\varnothing, \Omega\}$.

*Lemma* 5. *Suppose that $A^n = (A_k^n, \mathcal{F}_k^n)_{k\geq 0}$, $n \geq 1$, are non-decreasing processes, locally integrable (relative to the measure $\mathbf{P}^n$), ($A^n \in \mathcal{A}_{loc}^+(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$) with $A_0^n = 0$, and that their compensators are $\widetilde{A}^n = (\widetilde{A}_k^n, \mathcal{F}_{k-1}^n)$ (that is, $A^n - \widetilde{A}^n$ is in the class of locally integrable martingales $\mathcal{M}_{loc}(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$) and $A_\infty^n = \lim_k A_k^n$, $\widetilde{A}_\infty^n = \lim_k \widetilde{A}_k^n$.*

*Then*

$$(\widetilde{A}_\infty^n, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight} \Rightarrow (A_\infty^n, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight}.$$

*If, in addition,*

$$\sup_n \mathbf{E}^n \sup_{k\geq 1} (A_k^n - A_{k-1}^n) < \infty,$$

*then*

$$(\widetilde{A}_\infty^n, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight} \Leftrightarrow (A_\infty^n, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight}.$$

*Proof.* Suppose that $X = (X_k, \mathcal{F}_k)$ and $Y = (Y_k, \mathcal{F}_k)$ are two non-negative processes with discrete time $k \geq 0$, and that $Y$ is a non-decreasing and locally integrable process, defined on some probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ with filtration $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k\geq 0}$.

Let us assume that the process $X$ is dominated by the process $Y$ in the sense that $\mathbf{E}X_\tau \leq \mathbf{E}Y_\tau$ for every finite stopping time $\tau$ [12]. If $Y$ is predictable, that is, if $Y_k$ is $\mathcal{F}_{k-1}$-measurable, then the Lenglart inequality holds (see [12]): for any $N>0$, $L>0$, and for every stopping time $\tau$

$$\mathbf{P}(\sup_{k\leqslant\tau} X_k \geqslant N) \leqslant \frac{L}{N} + \mathbf{P}(Y_\tau \geqslant L). \tag{3.1}$$

When $Y$ is not necessarily predictable, then the Lenglart-Rebolledo inequality holds (see [13]): for any $N>0$, $L>0$, and for every stopping time $\tau$

$$\mathbf{P}(\sup_{k\leqslant\tau} X_k \geqslant N) \leqslant \frac{1}{N}[L + \mathbf{E}\sup_k (A_k - A_{k-1})] + \mathbf{P}(Y_\tau \geqslant L). \tag{3.2}$$

Since under the assumptions of the lemma $\mathbf{E}A^n_\tau = \mathbf{E}\widetilde{A}^n_\tau$ for every finite stopping time $\tau$ (relative to $\mathbf{F}^n$) (3.1) implies that

$$\mathbf{P}^n(A^n_\infty \geqslant N) \leqslant \frac{L}{N} + \mathbf{P}^n(\widetilde{A}^n_\infty \geqslant L), \tag{3.3}$$

and (3.2) shows that

$$\mathbf{P}^n(\widetilde{A}^n_\infty \geqslant N) \leqslant \frac{1}{N}[L + \mathbf{E}^n \sup_k (A^n_k - A^n_{k-1})] + \mathbf{P}^n(A^n_\infty \geqslant L). \tag{3.4}$$

From these inequalities the required assertion of the lemma now follows in the obvious way from a passage to the limits $\lim_L \overline{\lim_N}\, \overline{\lim_n}$.

2. *Lemma* 6. *Let* $M^n = (M^n_k, \mathcal{F}^n_k)_{k\geqslant 0}$ *be local martingales (relative to* $\mathbf{P}^n$*), that is,* $M^n \in \mathcal{M}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$*, and let*

$$\sup_n \mathbf{E}^n \sup_{k\geqslant 1} |M^n_k - M^n_{k-1}| < \infty. \tag{3.5}$$

*Then*

$$([M^n, M^n]_\infty, \mathbf{P}^n)\text{-}as.\ tight \iff (\sup_k |M^n_k|, \mathbf{P}^n)\text{-}as.\ tight. \tag{3.6}$$

*Proof.* Now we use Davis's inequalities ([17], 490)

$$\mathbf{E}^n \sup_{k\leqslant\tau} |M^n_k| \leqslant C_1 \mathbf{E}^n [M^n, M^n]^{1/2}_\tau, \tag{3.7}$$

$$\mathbf{E}^n [M^n, M^n]^{1/2}_\tau \leqslant C_2 \mathbf{E}^n \sup_{k\leqslant\tau} |M^n_k|, \tag{3.8}$$

which hold for any stopping time $\tau$ (relative to $\mathbf{F}^n$) with universal constants $0 < C_1 < \infty$, $0 < C_2 < \infty$.

Then from (3.2)

$$\mathbf{P}^n(\sup_k |M^n_k| \geqslant N) \leqslant \frac{1}{N}\{L - C_1 \mathbf{E}^n \sup_k ([M^n, M^n]^{1/2}_k - [M^n, M^n]^{1/2}_{k-1})\} + \mathbf{P}^n([M^n, M^n]^{1/2}_\infty \geqslant L/C_1), \tag{3.9}$$

and similarly,

$$\mathbf{P}^n([M^n, M^n]_\infty \geqslant N) \leqslant \frac{1}{N}\{L + C_2 \mathbf{E}^n \sup_k (\sup_{j\leqslant k} |M^n_j| - \sup_{j\leqslant k-1} |M^n_j|)\} + \mathbf{P}^n(\sup_k |M^n_k| \geqslant L/C_2). \tag{3.10}$$



Since

$$\sup_k (\sup_{j\leqslant k} |M^n_j| - \sup_{j\leqslant k-1} |M^n_j|) \leqslant \sup_k |M^n_k - M^n_{k-1}|$$

and

$$\sup_k ([M^n, M^n]^{1/2}_k - [M^n, M^n]^{1/2}_{k-1}) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_k \{([M^n, M^n]_{k-1} + (M^n_k - M^n_{k-1})^2)^{1/2} - [M^n, M^n]^{1/2}_{k-1}\} \leqslant \sup_k |M^n_k - M^n_{k-1}|,$$

by the assumption (3.5) the required assertion (3.6) follows from (3.9) and (3.10), as a result of the passage to the limits $\lim_L \overline{\lim_N}\, \overline{\lim_n}$.

*Lemma* 7. *Let* $M^n = (M^n_k, \mathcal{F}^n_k)_{k\geqslant 0}$ *be a square integrable local martingale* $(M^n \in \mathcal{M}^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n))$. *Then*

$$(\langle M^n\rangle_\infty, \mathbf{P}^n)\text{-}as.\ tight \Rightarrow (\sup_k |M^n_k|, \mathbf{P}^n)\text{-}as.\ tight. \tag{3.11}$$

*If, in addition,*

$$\sup_n \mathbf{E}^n \sup_k |M^n_k - M^n_{k-1}|^2 < \infty, \tag{3.12}$$

*then*

$$(\langle M^n\rangle_\infty, \mathbf{P}^n)\text{-}as.\ tight \iff (\sup_k |M^n_k|, \mathbf{P}^n)\text{-}as.\ tight. \tag{3.13}$$

*Proof.* Since $(M^n)^2$ is dominated by the process $\langle M^n\rangle$, from (3.1)

$$\mathbf{P}^n(\sup_k |M^n_k| \geqslant N) \leqslant \frac{L}{N^2} + \mathbf{P}^n(\langle M^n\rangle_\infty \geqslant L).$$

Now (3.11) follows after a passage to the limits $\lim_L \overline{\lim_N}\, \overline{\lim_n}$.

Next,

$$\sup_k ([M^n, M^n]_k - [M^n, M^n]_{k-1}) = \sup_k |M^n_k - M^n_{k-1}|^2.$$

Therefore, by (3.12) and the second part of Lemma 5

$$([M^n, M^n]_\infty, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight} \iff (\langle M^n\rangle_\infty, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight}. \tag{3.14}$$

Together with (3.6) this gives (3.13).

*Lemma* 8. *Let* $X^n = (X^n_k, \mathcal{F}^n_k)_{k\geqslant 0}$, $n \geqslant 1$, *be submartingales with*

$$|x^n_k| \leqslant c, \quad k \geqslant 1, \quad n \geqslant 1, \tag{3.15}$$

*where* $x^n_k = X^n_k - X^n_{k-1}$, $k \geqslant 1$.

*Then*

$$(\sup_k |X^n_k|, \mathbf{P}^n)\text{-}as.\ tight \iff (\sum_{k=1}^\infty \mathbf{E}^n(x^n_k + (x^n_k)^2 | \mathcal{F}^n_{k-1}), \mathbf{P}^n)\text{-}as.\ tight. \tag{3.16}$$

*Proof.* Since $X^n$ is a submartingale, $\mathbf{E}^n(x^n_k | \mathcal{F}^n_{k-1}) \geqslant 0$. We define

$$A^n_0 = 0, \quad A^n_k = \sum_{j=1}^k \mathbf{E}^n(x^n_j | \mathcal{F}^n_{j-1}), \quad M^n_k = X^n_k - A^n_k.$$

Obviously, $A^n_k - A^n_{k-1} \leqslant c$, and $|M^n_k - M^n_{k-1}| \leqslant 2c$. Hence, $M^n \in \mathcal{M}^2_{loc}(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$.

Observe that

$$\langle M^n\rangle_k = \sum_{j=0}^{k} \{\mathbf{E}^n((x^n_j)^2|\mathcal{F}^n_{j-1}) - (\mathbf{E}^n(x^n_j|\mathcal{F}^n_{j-1}))^2\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{k} \mathbf{E}^n((x^n_j)^2|\mathcal{F}^n_{j-1}) \quad (= B^n_k),$$

and if we write $Y^n_k = A^n_k + \sup_{j\leqslant k}(M^n_j)^2$, then Doob's inequality shows that

$$\mathbf{E}^n Y^n_\tau \leqslant \mathbf{E}^n(A^n_\tau + 4\langle M^n\rangle_\tau) \leqslant 4\mathbf{E}^n(A^n_\tau + B^n_\tau)$$

for every finite stopping time $\tau$ (relative to $(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$). Therefore, from (3.1),

$$\mathbf{P}^n(Y^n_\infty \geqslant N) \leqslant \frac{L}{N} + \mathbf{P}^n(A^n_\infty + B^n_\infty \geqslant L/4).$$

Now we use the fact that

$$Y^n_\infty + 1 \geqslant A^n_\infty + \sup_k |M^n_k| \geqslant \sup_k |X^n_k|.$$

Then

(3.17) $$\mathbf{P}^n(\sup_k |X^n_k| \geqslant N+1) \leqslant \mathbf{P}^n(Y^n_\infty \geqslant N) \leqslant \frac{L}{N} + \mathbf{P}^n(A^n_\infty + B^n_\infty \geqslant L/4),$$

and the reverse implication in (3.16) follows from a passage to the limits $\lim_L \overline{\lim_N}\, \overline{\lim_n}$.

Now let us establish the direct implication.

Since for every stopping time $\tau$ (relative to $(\mathbf{F}^n, \mathbf{P}^n)$)

$$\mathbf{E}^n A^n_{k\wedge\tau} = \mathbf{E}^n X^n_{k\wedge\tau} \leqslant \mathbf{E}^n \sup_{j\leqslant\tau} |X^n_j|,$$

we find that

$$\mathbf{E}^n A^n_\tau \leqslant \mathbf{E}^n \sup_{j\leqslant\tau} |X^n_j|.$$

Then from (3.2)

$$\mathbf{P}^n(A^n_\infty \geqslant N) \leqslant \frac{L+c}{N} + \mathbf{P}^n(\sup_k |X^n_k| \geqslant L),$$

hence,

(3.18) $$(\sup_k |X^n_k|, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight} \Rightarrow (A^n_\infty, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight}.$$

Since $\sup_k |M^n_k| \leqslant \sup_k |X^n_k| + A^n_\infty$, we obtain

$$(\sup_k |X^n_k|, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight} \Rightarrow (\sup_k |M^n_k|, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight}.$$

By Lemma 7,

(3.19) $$(\sup_k |M^n_k|, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight} \Rightarrow (\langle M^n\rangle_\infty, \mathbf{P}^n)\text{-as. tight}.$$



Thus, $B^n_\infty \leqslant \langle M^n\rangle_\infty + (A^n_\infty)^2$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}^n(x^n_k + (x^n_k)^2|\mathcal{F}^n_{k-1}) = A^n_\infty + B^n_\infty \leqslant A^n_\infty + (A^n_\infty)^2 + \langle M^n\rangle_\infty,$$

therefore, the direct part of (3.16) follows from (3.18) and (3.19).

## §4. Characterization of contiguity and entire asymptotic separation

1. Let $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$ be a sequence of measurable spaces, and $\mathbf{P}^n$ and $\widetilde{\mathbf{P}}^n$ probability measures on $(\Omega^n, \mathcal{F}^n)$, $n \geqslant 1$.

*Lemma* 9. *The following conditions are equivalent*:

(a) $$(\widetilde{\mathbf{P}}^n) \lhd (\mathbf{P}^n);$$

(b) $\lim_n \widetilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} = \infty) = 0$ *and the* $(z_{n\infty})_{n\geqslant 0}$ *are uniformly integrable relative to* $(\mathbf{P}^n)$:

(4.1) $$\sup_n \int_{\{z_{n\infty} > c\}} z_{n\infty}\, d\mathbf{P}^n \to 0, \quad c \to \infty;$$

(c) $$(z_{n\infty}, \widetilde{\mathbf{P}}^n)\text{-}as.\ tight;$$

(d) $$(\sup_k z_{nk}, \widetilde{\mathbf{P}}^n)\text{-}as.\ tight.$$

*Proof.* The equivalence of (a), (b), and (c) is well known, see, for example, [5]. Condition (d) and its equivalence to (a) is apparently new. It turns out that the equivalence of (a) and (d) plays a decisive role in the proof of Theorem 1.

For the completeness of the exposition and the convenience of the reader we give a full proof of the equivalence of all four conditions.

(a) ⇒ (b). Since $\mathbf{P}^n(z_{n\infty} = \infty) = 0$, contiguity implies $\lim_n \widetilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty} = \infty) = 0$. Now (4.1) is equivalent to the following two conditions (see the lemma in [5], §3; or Lemma 2 in [17], 206):

(4.2) $$\sup_n \int_\Omega z_{n\infty}\, d\mathbf{P}^n < \infty,$$

(4.3) $$\mathbf{P}^n(A^n) \to 0, \quad A^n \in \mathcal{F}^n \Rightarrow \int_{A^n} z_{n\infty}\, d\mathbf{P}^n \to 0.$$

By the Lebesgue decomposition,

$$\int_{A^n} z_{n\infty}\, d\mathbf{P}^n \leqslant \widetilde{\mathbf{P}}^n(A^n) \leqslant 1.$$

Hence, (4.2) and (4.3) follow obviously, because by contiguity

$$\mathbf{P}^n(A^n) \to 0, \quad A^n \in \mathcal{F}^n \Rightarrow \widetilde{\mathbf{P}}^n(A^n) \to 0.$$

(b) ⇒ (c). By the Lebesgue decomposition,

$$\tilde{P}^n(z_{n\infty} > N) = \int_{\{z_{n\infty}>N\}} z_{n\infty}\, dP^n + \tilde{P}^n(z_{n\infty} = \infty).$$

Then by (b),

$$\overline{\lim_n}\, \tilde{P}^n(z_{n\infty} > N) = \overline{\lim_n} \int_{\{z_{n\infty}>N\}} z_{n\infty}\, dP^n \to 0, \qquad N\to\infty,$$

and this proves (c).

(c) ⇒ (a). From (c) it follows that for every $\varepsilon > 0$ there exist $N$ and $n_0$ such that $\tilde{P}^n(z_{n\infty} > N) \leqslant \varepsilon/2$ for every $n \geqslant n_0$. Therefore,

$$\tilde{P}^n(A^n) = \tilde{P}^n(A^n \cap \{z_{n\infty} \leqslant N\}) + \tilde{P}^n(A^n \cap \{z_{n\infty} > N\}) \leqslant$$
$$\leqslant \int_{A^n \cap \{z_{n\infty}\leqslant N\}} z_{n\infty} d\tilde{P}^n + \tilde{P}^n(z_{n\infty} > N) \leqslant NP^n(A^n) + \varepsilon/2,$$

and if $P^n(A^n) \to 0$, then $\overline{\lim_n}\, \tilde{P}^n(A^n) \leqslant \varepsilon/2$. Since $\varepsilon > 0$ is arbitrary, this proves (a).

(c) ⇔ (d). The validity of these implications follows evidently from the inequalities

$$\tilde{P}^n(z_{n\infty} \geqslant N) \leqslant \tilde{P}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant N) \leqslant \frac{L}{N} + \tilde{P}^n(z_{n\infty} \geqslant L). \tag{4.4}$$

The left inequality is obvious. To prove the right inequality we use the Lebesgue decomposition. Then

$$\tilde{P}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant N) =$$
$$= \int_{\{\sup_k z_{nk}\geqslant N\}} z_{n\infty}\, dP^n + \tilde{P}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant N,\ z_{n\infty} = \infty) =$$
$$= \int_{\{\sup_k z_{nk}\geqslant N\}} z_{n\infty}\, dP^n + \tilde{P}^n(z_{n\infty} = \infty) =$$
$$= \int_{\{\sup_k z_{nk}\geqslant N,\ z_{n\infty}\geqslant L\}} z_{n\infty}\, dP^n + \int_{\{\sup_k z_{nk}\geqslant N,\ z_{n\infty}< L\}} z_{n\infty}\, dP^n + \tilde{P}^n(z_{n\infty} = \infty) \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\{z_{n\infty}\geqslant L\}} z_{n\infty}\, dP^n + L \int_{\{\sup_k z_{nk}\geqslant N\}} dP^n + \tilde{P}^n(z_{n\infty} = \infty) =$$
$$= \tilde{P}^n(z_{n\infty} \geqslant L) + LP^n(\sup_k z_{nk} \geqslant N),$$

where by Lemma 2 $P^n(\sup_k z_{nk} \geqslant N) \leqslant 1/N$.

Thus, the right inequality in (4.4) is also established.



*Lemma* 10. *The following conditions are equivalent:*

(a) $(\tilde{P}^n) \vartriangle (P^n)$;

(b) $\overline{\lim_n}\, \tilde{P}^n(z_{n\infty} \geqslant N) = 1$ *for all* $N > 0$;

(c) $\overline{\lim_n}\, \tilde{P}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant N) = 1$ *for all* $N > 0$.

*Proof.* The equivalence of (a) and (b) follows as in [10].

(a) ⇒ (b). In accordance with the Definition 2 in §1 we can find a subsequence $(n')$ and sets $A^{n'} \in \mathcal{F}^{n'}$ such that

$$\lim_{n'} P^{n'}(A^{n'}) = 0 \quad\text{and}\quad \lim_{n'} \tilde{P}^{n'}(A^{n'}) = 1. \tag{4.5}$$

Then, by the Lebesgue decomposition,

$$\tilde{P}^{n'}(A^{n'}) = \int_{A^{n'}\cap\{z_{n'\infty}\leqslant L\}} z_{n'\infty}\, dP^{n'} + \tilde{P}^{n'}(A^{n'} \cap \{z_{n'\infty} > L\}) \leqslant$$
$$\leqslant LP^{n'}(A^{n'}) + \tilde{P}^{n'}(z_{n'\infty} > L).$$

Together with (4.5) this shows that $\lim_{n'} \tilde{P}^{n'}(z_{n'\infty} > L) = 1$, and this establishes (b).

(b) ⇒ (a). From (b) it follows that for every $k > 0$ there is a subsequence $(n_k)$ such that $n_k < n_{k+1}$ and

$$\tilde{P}^{n_k}(z_{n_k\infty} > k) \geqslant 1 - 1/k.$$

Consequently,

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{P}^{n_k}(z_{n_k\infty} > k) = 1.$$

Next, $P^{n_k}(z_{n_k\infty} > k) \leqslant E^{n_k} z_{n_k\infty}/k \leqslant 1/k$. Therefore, $\lim_{k\to\infty} P^{n_k}(z_{n_k\infty} > k) = 0$, and this proves that $(\tilde{P}^n) \vartriangle (P^n)$.

(b) ⇔ (c). That (b) ⇒ (c) is evident. To prove that (c) ⇒ (b) we note that according to (4.4)

$$\tilde{P}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant N) \leqslant \frac{L}{N} + \tilde{P}^n(z_{n\infty} \geqslant L),$$

hence, that for every $L > 0$

$$\overline{\lim_n}\, \tilde{P}^n(z_{n\infty} \geqslant L) \leqslant 1 - \frac{L}{N} \to 1, \qquad N \to \infty.$$

## §5. Proof of Theorem 1

1. We begin with the second part of Theorem 1, that is, we show that under the condition ($\alpha$)

$$(\beta) \Longleftrightarrow (\beta^*) \tag{5.1}$$

and

$$(\beta) \Longleftrightarrow (\beta^{**}). \tag{5.2}$$

By Lemma 4,

$$\frac{1}{2} I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\,\mathrm{E}_{Q^n}\,[(\sqrt{\widetilde{\beta}_{nk}}-\sqrt{\beta_{nk}})^2\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1}]=$$
$$=I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\,(1-\mathrm{E}^n(\sqrt{\alpha_{nk}}\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1})).$$

Therefore, $(\beta)\Rightarrow(\beta^*)$.

Suppose now that $(\alpha)$ holds. We claim that then $(\beta^*)\Rightarrow(\beta)$. Let $\xi_{nk}$ be non-negative random variables. Then for all $L>0$ and $N>0$

$$(5.3)\quad \widetilde{\mathrm{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\xi_{nk}\geq N\Big)=\widetilde{\mathrm{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\,\xi_{nk}\geq N,\ \sup_k\alpha_{nk}<\infty\Big)+$$
$$+\widetilde{\mathrm{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\xi_{nk}\geq N,\ \sup_k\alpha_{nk}=\infty\Big)\leq$$
$$\leq\widetilde{\mathrm{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\,\xi_{nk}\geq N\Big)+\widetilde{\mathrm{P}}^n(\sup_k\alpha_{nk}\geq L).$$

From this the required implication $(\beta^*)\Rightarrow(\beta)$ follows (with $(\alpha)$ taken into account as a result of the limit passages $\lim\limits_L\ \lim\limits_N\ \overline{\lim\limits_n}$ if we set $\xi_{nk}=\mathrm{E}_{Q^n}\,[(\sqrt{\widetilde{\beta}_{nk}}-\sqrt{\beta_{nk}})^2\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1}]$.

Thus, (5.1) is established.

$(\beta)\Rightarrow(\beta^{**})$. Clearly,

$$(5.4)\quad I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\,\mathrm{E}^n((1-\sqrt{\alpha_{nk}})^2\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1})=$$
$$=2I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\{1-\mathrm{E}^n(\sqrt{\alpha_{nk}}\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1})\}-2I(\alpha_{n,k-1}<\infty)+$$
$$+I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\,\mathrm{E}(1\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1})+I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\,\mathrm{E}^n(\alpha_{n,k}\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1}).$$

From (2.9) with $\eta\equiv 1$ it follows that $\widetilde{\mathrm{P}}^n$-a.s.

$$(5.5)\quad I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\,\mathrm{E}^n(\alpha_{n,k}\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1})=1-\widetilde{\mathrm{P}}^n(\alpha_{n,k}=\infty\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1}),$$

and from (2.6) with $\eta=\mathrm{E}^n(1\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1})-1$ that $\widetilde{\mathrm{P}}^n$-a.s.

$$(5.6)\quad I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\,\mathrm{E}^n(1\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1})=I(\alpha_{n,k-1}<\infty).$$

Therefore, from (5.4)–(5.6) we find that $\widetilde{\mathrm{P}}^n$-a.s.

$$(5.7)\quad I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\,\mathrm{E}^n((1-\sqrt{\alpha_{nk}})^2\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1})=$$
$$=2I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\{1-\mathrm{E}^n(\sqrt{\alpha_{nk}}\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1})\}-I(\alpha_{n,k-1}<\infty)+$$
$$+1-\widetilde{\mathrm{P}}^n(\alpha_{n,k}=\infty\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1})=2I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\{1-\mathrm{E}^n(\sqrt{\alpha_{nk}}\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1})\}+$$
$$+I(\alpha_{n,k-1}=\infty)-\widetilde{\mathrm{P}}^n(\alpha_{n,k}=\infty\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1}).$$

Since $(\beta)\Rightarrow(\beta^*)$ and $(\alpha)$ holds, due to (5.3) it is sufficient to show that for every $L\geq 1$

$$(5.8)\quad (\alpha)\Rightarrow\overline{\lim_n}\,\widetilde{\mathrm{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}I(\alpha_{nk}=\infty)\geq L\Big)=0$$

and

$$(5.9)\quad (\alpha)\Rightarrow\overline{\lim_n}\,\widetilde{\mathrm{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{\mathrm{P}}^n(\alpha_{nk}=\infty\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1})\geq L\Big)=0.$$



But since

$$\{\sup_k\alpha_{nk}>N\}=\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}I(\alpha_{nk}>N)\geq 1\Big\}\supseteq\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}I(\alpha_{nk}=\infty)\geq 1\Big\},$$

by $(\alpha)$

$$\overline{\lim_n}\,\widetilde{\mathrm{P}}^n\Big(\sum_{n=1}^{\infty}I(\alpha_{nk}=\infty)\geq 1\Big)\leq\overline{\lim_n}\,\widetilde{\mathrm{P}}^n(\sup_k\alpha_{nk}\geq N)\to 0,\quad N\to\infty,$$

in particular, (5.8) holds for every $L\geq 1$.

Finally, from (3.4)

$$\widetilde{\mathrm{P}}^n\Big(\sum_{h=1}^{\infty}\widetilde{\mathrm{P}}^n(\alpha_{nk}=\infty\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1})\geq N\Big)\leq\frac{L+1}{N}+\widetilde{\mathrm{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty}I(\alpha_{nk}=\infty)\geq L\Big).$$

Now (5.8) follows from this and (5.9).

$(\beta^{**})\Rightarrow(\beta)$. From $(\beta^{**})$ it follows that

$$\lim_N\ \overline{\lim_n}\,\widetilde{\mathrm{P}}^n\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}I(\alpha_{n,k-1}<\infty)\,\mathrm{E}^n[(1-\alpha_{nk}^{1/2})^2\,|\,\mathcal{F}^n_{k-1}]\geq N\Big\}=0.$$

Hence, $(\beta^*)$ follows from (5.7) and the relations (5.8) and (5.9), which hold when $(\alpha)$ holds.

Thus, $(\beta)\Rightarrow(\beta^{**})\Rightarrow(\beta^*)\Rightarrow(\beta)$, and this establishes (5.2) (assuming that $(\alpha)$ holds).

2. Now we turn to the first part of the theorem.

**Sufficiency.**

By Lemma 9 we have to show that

$$(5.10)\quad (\alpha),\ (\beta)\Rightarrow(\sup_k z_{nk},\ \widetilde{\mathrm{P}}^n)\text{-as. tight.}$$

With this aim we introduce for every $c\geq 1$ the function

$$u^c(x)=\begin{cases}x & \text{for } |x|\leq c,\\ c\,\mathrm{sign}\,x & \text{for } |x|>c,\end{cases}$$

and the sets

$$A^n_c=\{\sup_k\alpha_{nk}<e^c\}\cap\{\inf_k\alpha_{nk}>e^{-c}\}.$$

We write

$$(5.11)\quad X^c_{nk}=\sum_{j=1}^{k}u_c(\log\alpha_{nj}),$$

and note that

$$X^c_{nk}\cdot I_{A^n_c}=\Big(\sum_{j=1}^{k}\log\alpha_{nj}\Big)\cdot I_{A^n_c}=(\log z_{nk})\cdot I_{A^n_c}.$$

Therefore, for $N \geqslant 1$,

$$(5.12)\qquad \{\sup_k z_{nk} \geqslant N\} \subseteq \{\sup_k |X^c_{nk}| \geqslant \log N\} \cup \{\Omega \setminus A^n_c\} = \\ = \{\sup_k |X^c_{nk}| \geqslant \log N\} \cup \{\sup_k \alpha_{nk} \geqslant e^c\} \cup \{\inf_k \alpha_{nk} \leqslant e^{-c}\}.$$

and similarly

$$(5.13)\qquad \{\sup_k |X^c_{nk}| \geqslant \log N\} \subseteq \{\sup_k |\log z_{nk}| \geqslant \log N\} \cup \{\Omega \setminus A^n_c\} = \\ = \{\sup_k z_{nk} \geqslant N\} \cup \Big\{\inf_k z_{nk} \leqslant \frac{1}{N}\Big\} \cup \{\sup_k \alpha_{nk} \geqslant e^c\} \cup \{\inf_k \alpha_{nk} \leqslant e^{-c}\}.$$

From (5.12) and ($\alpha$) as a result of the passage to the limits $\overline{\lim_c}\ \overline{\lim_N}\ \overline{\lim_n}$ we find that

$$(5.14)\qquad \overline{\lim_N}\ \overline{\lim_n}\ \widetilde{\mathrm{P}}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant N) \leqslant \\ \leqslant \overline{\lim_c}\ \overline{\lim_N}\ \overline{\lim_n}\ \widetilde{\mathrm{P}}^n(\sup_k |X^c_{nk}| \geqslant \log N) + \overline{\lim_c}\ \overline{\lim_n}\ \widetilde{\mathrm{P}}^n(\inf_k \alpha_{nk} \leqslant e^{-c}).$$

Now we claim that

$$(5.15)\qquad (\alpha), (\beta) \Rightarrow \overline{\lim_c}\ \overline{\lim_n}\ \widetilde{\mathrm{P}}^n(\inf_k \alpha_{nk} \leqslant e^{-c}) = 0.$$

By Lemma 3 with $\eta = (1 - \alpha_{nk}^{-1/2})^2$ we have ($\widetilde{\mathrm{P}}^n$-a.s.)

$$\widetilde{\mathrm{E}}^n((1-\alpha_{nk}^{-1/2})^2 | \mathcal{F}^n_{k-1}) = I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\, \mathrm{E}^n((1-\sqrt{\alpha_{nk}})^2 | \mathcal{F}^n_{k-1}) + \\ + \widetilde{\mathrm{P}}^n(\alpha_{nk} = \infty | \mathcal{F}^n_{k-1}) - I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\, \mathrm{P}(\alpha_{n,k} = 0 | \mathcal{F}^n_{k-1}).$$

Since ($\alpha$), ($\beta$) $\Rightarrow$ ($\beta^{**}$) and ($\alpha$) $\Rightarrow$ (5.9),

$$(5.16)\qquad \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{\mathrm{E}}^n((1-\alpha_{nk}^{-1/2})^2 | \mathcal{F}^n_{k-1}),\ \widetilde{\mathrm{P}}^n\Big)\text{-as. tight.}$$

Hence, by Lemma 5,

$$(5.17)\qquad \Big(\sum_{k=1}^{\infty} (1-\alpha_{kn}^{-1/2})^2,\ \widetilde{\mathrm{P}}^n\Big)\text{-as. tight.}$$

Finally, for $N \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} \leqslant 1/N)(N^{1/2}-1)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} \leqslant 1/N)(1-\alpha_{nk}^{-1/2})^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} (1-\alpha_{nk}^{-1/2})^2,$$

hence,

$$\widetilde{\mathrm{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} \leqslant 1/N) \geqslant L(N^{1/2}-1)^{-2}\Big) \leqslant \widetilde{\mathrm{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} (1-\alpha_{nk}^{-1/2})^2 \geqslant L\Big).$$

Choosing $L = (N^{1/2}-1)^2$, this and (5.17) together with a passage to the limits $\overline{\lim_N}\ \overline{\lim_n}$ gives

$$(5.18)\qquad \overline{\lim_N}\ \overline{\lim_n}\ \widetilde{\mathrm{P}}^n\Big(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} \leqslant 1/N) \geqslant 1\Big) = 0.$$



But $\{\inf_k \alpha_{nk} < 1/N\} = \Big\{\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{nk} < 1/N) \geqslant 1\Big\}$. Therefore, the required implication (5.15) follows from (5.18).

Thus, on the right-hand side of (5.14) the last term vanishes. We now show that

$$(5.19)\qquad (\alpha), (\beta) \Rightarrow \overline{\lim_N}\ \overline{\lim_n}\ \widetilde{\mathrm{P}}^n(\sup_k |X^c_{nk}| \geqslant \log N) = 0,$$

in other words, that for all $c \geqslant 1$

$$(\alpha), (\beta) \Rightarrow (\sup_k |X_{nk}|,\ \widetilde{\mathrm{P}}^n)\text{-as. tight.}$$

We claim that $X^n = (X^c_{nk}, \mathcal{F}^n_k)$ for all $c \geqslant 1$ is a submartingale relative to $\widetilde{\mathrm{P}}^n$, $n \geqslant 1$. It is sufficient to show that ($\widetilde{\mathrm{P}}^n$a.s.)

$$(5.20)\qquad \widetilde{\mathrm{E}}^n(u_c(\log \alpha_{nj}) | \mathcal{F}^n_{j-1}) \geqslant 0.$$

By Lemma 3 ($\widetilde{\mathrm{P}}^n$-a.s.)

$$(5.21)\qquad \widetilde{\mathrm{E}}^n(u_c(\log \alpha_{nj}) | \mathcal{F}^n_{j-1}) = \\ = I(\alpha_{n,j-1} < \infty)\, \mathrm{E}^n(\alpha_{nj} u_c(\log \alpha_{nj}) | \mathcal{F}^n_{j-1}) + c\widetilde{\mathrm{P}}^n(\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}^n_{j-1}).$$

Observe that $xu_c(\log x) \geqslant x - 1$ for $x \geqslant 0$. Therefore ($\widetilde{\mathrm{P}}^n$-a.s.)

$$(5.22)\qquad I(\alpha_{n,j-1} < \infty)\mathrm{E}^n(\alpha_{nj} u_c(\log \alpha_{nj}) | \mathcal{F}^n_{j-1}) \geqslant \\ \geqslant I(\alpha_{n,j-1} < \infty)\, \mathrm{E}^n(\alpha_{nj} - 1 | \mathcal{F}^n_{j-1}) \quad (= J_{nj}).$$

Once again applying Lemma 3 and Corollary 2 to Lemma 1 we find that $\widetilde{\mathrm{P}}^n$-a.s.

$$(5.23)\qquad J_{nj} = 1 - \widetilde{\mathrm{P}}^n(\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}^n_{j-1}) - I(\alpha_{n,j-1} < \infty) = \\ = I(\alpha_{n,j-1} = \infty) - \widetilde{\mathrm{P}}^n(\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}^n_{j-1}).$$

From (5.21)-(5.23) it follows that $\widetilde{\mathrm{P}}^n$-a.s.

$$\widetilde{\mathrm{E}}^n(u_c(\log \alpha_{nj}) | \mathcal{F}^n_{j-1}) \geqslant I(\alpha_{n,j-1} = \infty) + (c-1)\, \widetilde{\mathrm{P}}^n(\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}^n_{j-1}) \geqslant 0,$$

because $c \geqslant 1$.

Thus, $X^n = (X^c_{nk}, \mathcal{F}^n_k)$ is a submartingale relative to $\widetilde{\mathrm{P}}^n$ with $|X^c_{nk} - X^c_{n,k-1}| \leqslant 2c$. According to Lemma 8 in §3, $(\sup_k |X^c_{nk}|, \widetilde{\mathrm{P}}^n)$-as. tight if and only if

$$\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \widetilde{\mathrm{E}}^n(u_c(\log \alpha_{nj}) + u_c^2(\log \alpha_{nj}) | \mathcal{F}^n_{j-1}),\ \widetilde{\mathrm{P}}^n\Big)\text{-as. tight.}$$

From Lemma 3 ($\widetilde{\mathrm{P}}^n$-a.s.)

$$(5.24)\qquad L_{nj} \equiv \widetilde{\mathrm{E}}^n(u_c(\log \alpha_{nj}) + u_c^2(\log \alpha_{nj}) | \mathcal{F}^n_{j-1}) = \\ = I(\alpha_{n,j-1} < \infty)\, \mathrm{E}^n(\alpha_{nj} u_c(\log \alpha_{nj}) + \alpha_{nj} u_c^2(\log \alpha_{nj}) | \mathcal{F}^n_{j-1}) + \\ + (c + c^2)\, \widetilde{\mathrm{P}}^n(\alpha_{nj} = \infty | \mathcal{F}^n_{j-1}).$$

Together with (5.22) and (5.23) this shows that

$$(5.25)\qquad L_{nj}=I(\alpha_{n,j-1}<\infty)\,E^n\big(\alpha_{nj}u_c(\log\alpha_{nj})+\alpha_{nj}u_c^2(\log\alpha_{nj})+1-\alpha_{nj}\,|\,\mathcal{F}^n_{j-1}\big)+(c+c^2)\,\widetilde{P}^n(\alpha_{nj}=\infty\,|\,\mathcal{F}^n_{j-1})-$$
$$-I(\alpha_{n,j-1}<\infty)+1-\widetilde{P}^n(\alpha_{nj}=\infty\,|\,\mathcal{F}^n_{j-1}).$$

Now we use the fact that for every $x\geqslant 0$

$$(5.26)\qquad a(c)(1-x^{1/2})^2\leqslant xu_c(\log x)+xu_c^2(\log x)+1-x\leqslant A(c)(1-x^{1/2})^2,$$

where $a(c)$ and $A(c)$ are positive constants. Then

$$L_{nj}\leqslant A(c)\,I(\alpha_{n,j-1}<\infty)\,E^n\big((1-\alpha_{nj}^{1/2})^2\,|\,\mathcal{F}^n_{j-1}\big)+$$
$$+I(\alpha_{n,j-1}=\infty)+[(c-1)+c^2]\,\widetilde{P}^n(\alpha_{nj}=\infty\,|\,\mathcal{F}^n_{j-1}),$$

hence,

$$(5.27)\qquad \sum_{j=1}^{\infty}L_{nj}\leqslant A(c)\,\xi_1^n+\xi_2^n+[(c-1)+c^2]\,\xi_3^n,$$

where

$$(5.28)\qquad \begin{cases}\xi_1^n=\sum_{j=1}^{\infty}I(\alpha_{n,j-1}<\infty)\,E^n\big((1-\alpha_{nj}^{1/2})^2\,|\,\mathcal{F}^n_{j-1}\big),\\[4pt] \xi_2^n=\sum_{j=1}^{\infty}I(\alpha_{n,j-1}=\infty),\\[4pt] \xi_3^n=\sum_{j=1}^{\infty}\widetilde{P}^n(\alpha_{nj}=\infty\,|\,\mathcal{F}^n_{j-1}).\end{cases}$$

It is clear that

$$\widetilde{P}^n\Big(\sum_{j=1}^{\infty}L_{nj}\geqslant N\Big)\leqslant\widetilde{P}^n\Big(\xi_1^n\geqslant\frac{N}{3A(c)}\Big)+$$
$$+\widetilde{P}^n\Big(\xi_2^n\geqslant\frac{N}{3A(c)}\Big)+\widetilde{P}^n\Big(\xi_3^n\geqslant\frac{N}{3[(c-1)+c^2]}\Big).$$

Since $(\alpha)$, $(\beta)\Rightarrow(\beta^{**})$,

$$\lim_N\overline{\lim_n}\,\widetilde{P}^n\Big(\xi_1^n\geqslant\frac{N}{3A(c)}\Big)=0,$$

and by (5.8) and (5.9)

$$\lim_N\overline{\lim_n}\,\widetilde{P}^n\Big(\xi_2^n\geqslant\frac{N}{3A(c)}\Big)=0,$$
$$\lim_N\overline{\lim_n}\,\widetilde{P}^n\Big(\xi_3^n\geqslant\frac{N}{3[(c-1)+c^2]}\Big)=0.$$

Consequently, $(\sum_{j=1}^{\infty}L_{nj},\widetilde{P}^n)$-as. tight, hence also $(\sup_k|X^c_{nk}|,\widetilde{P}^n)$-as. tight, which shows that the conditions $(\alpha)$ and $(\beta)$ are sufficient for the contiguity $(\widetilde{P}^n)\lhd(P^n)$.



3. Necessity.

Suppose that $(\widetilde{P}^n)\lhd(P^n)$. First of all we show that $(\alpha)$ then holds, that is,

$$(5.29)\qquad (\widetilde{P}^n)\lhd(P^n)\Rightarrow(\sup_k\alpha_{nk},\widetilde{P}^n)\text{-as. tight.}$$

According to §2.3°, $\widetilde{P}$-a.s.

$$(5.30)\qquad \alpha_{nk}=\frac{z_{nk}}{z_{n,k-1}}\,I(\sup_k z_{nk}<\infty)+\alpha_{nk}I(\sup_k z_{nk}=\infty).$$

Thus, for every $N>0$, $L>0$, $b>0$,

$$\{\sup_k\alpha_{nk}\geqslant N\}\subseteq\Big\{\frac{\sup_k z_{nk}}{\inf_k z_{nk}}\geqslant N,\ \sup_k z_{nk}<\infty\Big\}\cup$$
$$\cup\{\sup_k\alpha_{nk}\geqslant N,\ \sup_k z_{nk}=\infty\}\subseteq\{\sup_k z_{nk}\geqslant N\inf_k z_{nk}\}\cup\{\sup_k z_{nk}\geqslant L\}=$$
$$=(\{\sup_k z_{nk}\geqslant N\inf_k z_{nk},\ \inf_k z_{nk}\leqslant b\}\cup\{\sup_k z_{nk}\geqslant L\})\cup$$
$$\cup(\{\sup_k z_{nk}\geqslant N\inf_k z_{nk},\ \inf_k z_{nk}>b\}\cup\{\sup_k z_{nk}\geqslant L\})\subseteq$$
$$\subseteq\{\inf_k z_{nk}\leqslant b\}\cup\{\sup_k z_{nk}\geqslant L\}\cup\{\sup_k z_{nk}\geqslant Nb\}$$

hence

$$\widetilde{P}^n(\sup_k\alpha_{nk}\geqslant N)\leqslant\widetilde{P}^n(\inf_k z_{nk}\leqslant b)+\widetilde{P}^n(\sup_k z_{nk}\geqslant L)+\widetilde{P}^n(\sup_k z_{nk}\geqslant Nb).$$

By the equivalence of (a) and (d) in Lemma 9 and by Lemma 2 we now obtain

$$\lim_N\overline{\lim_n}\,\widetilde{P}^n(\sup_k\alpha_{nk}\geqslant N)\leqslant b+\overline{\lim_n}\,\widetilde{P}^n(\sup_k z_{nk}\geqslant L)\to 0,$$
$$\text{as } b\to 0 \text{ and } L\to\infty.$$

Thus, the proof of (5.29) is complete.

By (5.30), for every $N>0$, $L>0$, $b>0$ ($\widetilde{P}^n$-a.s.)

$$(5.31)\qquad \Big\{\inf_k\alpha_{nk}\leqslant\frac{1}{N}\Big\}\subseteq\Big\{\frac{\inf_k z_{nk}}{\sup_k z_{nk}}\leqslant\frac{1}{N},\ \sup_k z_{nk}<\infty\Big\}\cup$$
$$\cup\Big\{\inf_k\alpha_{nk}\leqslant\frac{1}{N},\ \sup_k z_{nk}=\infty\Big\}\subseteq$$
$$\subseteq\{N\inf_k z_{nk}\leqslant\sup_k z_{nk}\}\cup\{\sup_k z_{nk}\geqslant L\}\subseteq$$
$$\subseteq\{Nb\leqslant\sup_k z_{nk},\ \inf_k z_{nk}>b\}\cup\{N\inf_k z_{nk}\leqslant\sup_k z_{nk},\ \inf_k z_{nk}\leqslant b\}\cup$$
$$\cup\{\sup_k z_{nk}\geqslant L\}\subseteq\{Nb\leqslant\sup_k z_{nk}\}\cup\{\inf_k z_{nk}\leqslant b\}\cup\{\sup_k z_{nk}\geqslant L\}.$$

Consequently,

$$\widetilde{P}^n\Big(\inf_k\alpha_{nk}\leqslant\frac{1}{N}\Big)\leqslant\widetilde{P}^n(\sup_k z_{nk}\geqslant Nb)+\widetilde{P}^n(\inf_k z_{nk}\leqslant b)+\widetilde{P}^n(\sup_k z_{nk}\geqslant L).$$

By Lemma 2, $\widetilde{\mathrm{P}}^n(\inf_k z_{nk}\leqslant b)\leqslant b$. Therefore, bearing in mind the equivalence of (a) and (d) in Lemma 9, we obtain

$$(5.32)\quad \lim_N \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathrm{P}}^n\left(\inf_k \alpha_{nk}\leqslant \frac{1}{N}\right)\leqslant \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathrm{P}}^n(\sup_k z_{nk}\geqslant L)+b\to 0,$$
$$\text{as } L\to\infty \text{ and } b\to 0.$$

Next we turn to the proof of the implication

$$(\widetilde{\mathrm{P}}^n)\vartriangleleft(\mathrm{P}^n)\Rightarrow(\beta).$$

By (5.13),

$$(5.33)\quad \widetilde{\mathrm{P}}^n(\sup_k |X^c_{nk}|\geqslant \log N)\leqslant \widetilde{\mathrm{P}}^n(\sup_k z_{nk}\geqslant N)+\widetilde{\mathrm{P}}^n\left(\inf_k z_{nk}\leqslant\frac{1}{N}\right)+$$
$$+\widetilde{\mathrm{P}}^n(\sup_k \alpha_{nk}\geqslant e^c)+\widetilde{\mathrm{P}}^n(\inf_k \alpha_{nk}\leqslant e^{-c}).$$

From (5.29), $\overline{\lim_{c\to\infty}}\,\overline{\lim_n}\,\widetilde{\mathrm{P}}^n(\sup_k \alpha_{nk}\geqslant e^c)=0$. From Lemma 2, $\overline{\lim_N}\,\overline{\lim_n}\,\widetilde{\mathrm{P}}^n\left(\inf_k z_{nk}\leqslant\frac{1}{N}\right)=0$; from Lemma 9, $\overline{\lim_N}\,\overline{\lim_n}\,\widetilde{\mathrm{P}}^n(\sup_k z_{nk}\geqslant N)=0$; from (5.32), $\overline{\lim_{c\to\infty}}\,\overline{\lim_n}\,\widetilde{\mathrm{P}}^n\times(\inf_k \alpha_{nk}\leqslant e^{-c})=0$. Therefore, as a result of the limit passage $\overline{\lim_{c\to\infty}}\,\overline{\lim_N}\,\overline{\lim_n}$ we find from (5.33) that

$$(5.34)\quad \overline{\lim_c}\,\overline{\lim_N}\,\overline{\lim_n}\,\widetilde{\mathrm{P}}^n(\sup_k|X^c_{nk}|\geqslant\log N)=0.$$

From this and from Lemma 8 it follows that

$$(5.35)\quad \overline{\lim_c}\,\overline{\lim_N}\,\overline{\lim_n}\,\widetilde{\mathrm{P}}^n\left(\sum_{j=1}^{\infty}L_{nj}\geqslant N\right)=0.$$

By analogy with (5.27), from (5.25) and (5.26) we deduce the inequality

$$(5.36)\quad \sum_{j=1}^{\infty}L_{nj}\geqslant a(c)\,\xi_1^n+\xi_2^n+[(c-1)+c^2]\,\xi_3^n,\qquad c\geqslant 1,$$

where $\xi_1^n$, $\xi_2^n$, and $\xi_3^n$ are defined in (5.28).

From (5.36),

$$(5.37)\quad \xi_1^n\leqslant a^{-1}(c)\left[\sum_{j=1}^{\infty}L_{nj}+\xi_2^n+((c-1)+c^2)\,\xi_3^n\right].$$

From (5.29) and (5.8) it follows that $((\xi_2^n),\widetilde{\mathrm{P}}^n)$-as. tight, and from (5.29) and (5.9) $((\xi_3^n,\widetilde{\mathrm{P}}^n)$-as. tight. Together with (5.35) and (5.37) that since $\inf_{c\geqslant 1} a(c)>0$,

$$(5.38)\quad (\widetilde{\mathrm{P}}^n)\vartriangleleft(\mathrm{P}^n)\Rightarrow((\xi_1^n),\ \widetilde{\mathrm{P}}^n)\text{-as. tight}.$$

Hence and from (5.3) applied to $\xi_{nk}=\mathrm{E}^n((1-\alpha_{nk}^{1/2})^2|\mathcal{F}^n_{k-1})$ we find that by (5.2) and (5.29) $(\widetilde{\mathrm{P}}^n)\vartriangleleft(\mathrm{P}^n)\Rightarrow(\beta^{**})\Leftrightarrow(\beta)$.

The proof of Theorem 1 is now complete.



## §6. Proofs of Theorems 2 and 3

1. The proof of Theorem 2 is based on the following general fact (Lemma 11).

Suppose that $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ is a probability space equipped with a filtration $\mathbf{F}=(\mathcal{F}_k)_{k\geqslant 0}$, $\mathcal{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}$, and that $(\gamma_k)_{k\geqslant 1}$ is an F-adapted sequence of random variables with values in $[0,\infty]$, for which 0 and $\infty$ are absorbing states, that is, $\gamma_k$ is $\mathcal{F}_k$-measurable, $\gamma_k=0$ on $\{\gamma_j=0\}$ for $k>j$, and $\gamma_k=\infty$ on $\{\gamma_j=\infty\}$ for $k>j$ (P-a.s.).

We set

$$\Gamma_k=\prod_{j=1}^{k}\gamma_j,\quad a_k=\mathrm{E}(\gamma_k\mid\mathcal{F}_{k-1}),\quad A_k=\prod_{j=1}^{k}a_j,\qquad k\geqslant 1.$$

**Lemma 11.** *If $\mathrm{E}\gamma_1\leqslant 1$ and $\mathrm{E}(\gamma_k\mid\mathcal{F}_{k-1})\leqslant 1$ (P-a.s.) for $k\geqslant 2$, then the sequence $\Gamma=(\Gamma_k)_{k\geqslant 1}$ admits the multiplicative decomposition*

$$(6.1)\qquad \Gamma_k=A_k\cdot S_k,$$

*where $A=(A_k,\mathcal{F}_{k-1})_{k\geqslant 1}$ is a non-decreasing process of $\mathcal{F}_{k-1}$ measurable random variables $A_k$, and $S=(S_k,\mathcal{F}_k)_{k\geqslant 1}$ is a non-negative supermartingale with $\mathrm{E}S_k\leqslant 1$.*

*Here, the limit $\Gamma_\infty\equiv\lim_n\Gamma_n$ exists (P-a.s.), and for any $a>0$ and $b>0$*

$$(6.2)\qquad \mathrm{P}(\Gamma_\infty\geqslant a)\leqslant\frac{b}{a}+\mathrm{P}(A_\infty\geqslant b).$$

*Proof.* We claim that to obtain the decomposition (6.1) we can set $S_k=\prod_{j=1}^{k}\gamma_j a_j^{\oplus}$, where

$$a^{\oplus}=\begin{cases}0, & a=0,\\ a^{-1}, & 0<a<\infty,\\ 0, & a=\infty.\end{cases}$$

For this purpose it is sufficient to show that

$$(6.3)\qquad \gamma_j=\gamma_j a_j^{\oplus}a_j\quad(\text{P-a.s.}).$$

Since $\gamma_j\geqslant\gamma_j a_j^{\oplus}a_j$ (P-a.s.), we must verify that

$$\mathrm{E}\gamma_j=\mathrm{E}\gamma_j a_j^{\oplus}a_j.$$

But $\mathrm{E}\gamma_j=\mathrm{E}a_j$, and on the other hand,

$$\mathrm{E}\gamma_j a_j^{\oplus}a_j=\mathrm{E}[a_j^{\oplus}a_j\mathrm{E}(\gamma_j\mid\mathcal{F}_{j-1})]=\mathrm{E}a_j^{\oplus}a_ja_j=\mathrm{E}a_j,$$

which proves (6.3).

We now claim that $S=(S_k,\mathcal{F}_k)$ is a supermartingale. In fact, we have (P-a.s.)

$$\mathrm{E}(S_k\mid\mathcal{F}_{k-1})=S_{k-1}\mathrm{E}(\gamma_k a_k^{\oplus}\mid\mathcal{F}_{k-1})=S_{k-1}a_k^{\oplus}a_k\leqslant S_{k-1}.$$

Further, $\mathrm{E}S_1=a_1a_1^{\oplus}\leqslant 1$, hence $\mathrm{E}S_k\leqslant 1$.

It is well known that a non-negative supermartingale converges (P-a.s.) to a finite limit. Therefore, the limit $S_\infty \equiv \lim_n S_n$ exists (P-a.s.), and $\mathbf{E}S_\infty \leqslant 1$.

Now we observe that $0 \leqslant A_1 = a_1 \leqslant 1$ and $A_{k+1} \leqslant A_k$ (P-a.s.). This means that the limit $A_\infty \equiv \lim_n A_n \geqslant 0$ exists, consequently, (P-a.s.) the limit $\Gamma_\infty \equiv \lim_\infty \Gamma_n$ exists and $\Gamma_\infty = A_\infty \cdot S_\infty$.

Now we establish (6.2).

For any $a > 0$ and $b > 0$ we have

$$\{\Gamma_\infty \geqslant a\} = \left\{\Gamma_\infty \geqslant a,\ S_\infty < \frac{a}{b}\right\} \cup \left\{\Gamma_\infty \geqslant a,\ S_\infty \geqslant \frac{a}{b}\right\} \subseteq$$
$$\subseteq \left\{\frac{a}{b} A_\infty \geqslant a\right\} \cup \left\{S_\infty \geqslant \frac{a}{b}\right\} = \{A_\infty \geqslant b\} \cup \left\{S_\infty \geqslant \frac{a}{b}\right\}.$$

Consequently,

$$\mathbf{P}(\Gamma_\infty \geqslant a) \leqslant \mathbf{P}(A_\infty \geqslant b) + \mathbf{P}\left(S_\infty \geqslant \frac{a}{b}\right).$$

The required estimate (6.2) now follows when we observe that

$$\mathbf{P}\left(S_\infty \geqslant \frac{a}{b}\right) \leqslant \frac{b}{a}\,\mathbf{E}S_\infty \leqslant \frac{b}{a}.$$

**2. Proof of Theorem 2.**

We set $\gamma_{nk} = \alpha_{nk}^{-1/2}$ and claim that

$$\widetilde{\mathbf{E}}^n(\gamma_{nk} \mid \mathscr{F}^n_{k-1}) \leqslant 1 \quad (\widetilde{\mathbf{P}}^n\text{-a.s.}), \qquad k \geqslant 1.$$

By Lemma 3 ($\widetilde{\mathbf{P}}^n$-a.s.)

$$\widetilde{\mathbf{E}}^n(\alpha_{nk}^{-1/2} \mid \mathscr{F}^n_{k-1}) = I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\,\mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} \mid \mathscr{F}^n_{k-1}),$$

and by Lemma 4 ($\widetilde{\mathbf{P}}^n$-a.s.)

$$I(\alpha_{n,k-1} < \infty)(1 - \mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} \mid \mathscr{F}^n_{k-1})) \geqslant 0.$$

Therefore, ($\widetilde{\mathbf{P}}^n$a.s.) $\widetilde{\mathbf{E}}^n(\alpha_{nk}^{-1/2} \mid \mathscr{F}^n_{k-1}) \leqslant 1$, $k \geqslant 1$. Applying Lemma 11 we find that

$$\widetilde{\mathbf{P}}^n(z_{n\infty}^{-1/2} \geqslant a) \leqslant \frac{b}{a} + \widetilde{\mathbf{P}}^n\left(\prod_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\,\mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} \mid \mathscr{F}^n_{k-1}) \geqslant b\right).$$

In this inequality we take $0 < b \leqslant 1$. Then

(6.4) $$\widetilde{\mathbf{P}}^n\left(z_{n\infty} > \frac{1}{a^2}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left(1 - \frac{b}{a}\right) - \widetilde{\mathbf{P}}^n\left(\sum_{k=1}^{\infty} \log\left[I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\,\mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} \mid \mathscr{F}^n_{k-1})\right] \geqslant \log b\right).$$

Since $\log x \leqslant x - 1$ for $x \geqslant 0$, we have

$$\log\left[I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\,\mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} \mid \mathscr{F}^n_{k-1})\right] \leqslant I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\,\mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} \mid \mathscr{F}^n_{k-1}) - 1 \leqslant$$
$$\leqslant I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\left[\mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} \mid \mathscr{F}^n_{k-1}) - 1\right],$$



and from (6.4) we find that

$$\widetilde{\mathbf{P}}^n\left(z_{n\infty} > \frac{1}{a^2}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left(1 - \frac{b}{a}\right) - \widetilde{\mathbf{P}}^n\left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\left[1 - \mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} \mid \mathscr{F}^n_{k-1})\right] \leqslant \log\frac{1}{b}\right).$$

Now by ($\gamma$), for any $0 < b \leqslant 1$,

$$\overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n\left(\sum_{k=1}^{\infty} I(\alpha_{n,k-1} < \infty)\left[1 - \mathbf{E}^n(\alpha_{nk}^{1/2} \mid \mathscr{F}^n_{k-1})\right] \leqslant \log\frac{1}{b}\right) = 0.$$

Therefore,

$$\overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n\left(z_{n\infty} > \frac{1}{a^2}\right) \geqslant 1 - \frac{b}{a},$$

and since $0 < b \leqslant 1$ is arbitrary,

$$\overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n\left(z_{n\infty} > \frac{1}{a^2}\right) = 1,$$

which by Lemma 10 is equivalent to $(\widetilde{\mathbf{P}}^n) \triangle (\mathbf{P}^n)$.

**3. Proof of Corollary 5.**

Since $\mathbf{P}^n_k(z_{nk} = \infty) = 0$ (see §2.5°) and $\widetilde{\mathbf{P}}^n_k \ll \mathbf{P}^n_k$, we obtain

$$\widetilde{\mathbf{P}}^n(\alpha_{nk} = \infty) = \widetilde{\mathbf{P}}^n_k(\alpha_{nk} = \infty) = \widetilde{\mathbf{P}}^n_k(z_{nk} = \infty) = 0,$$

and (1.8) follows directly from the assertion of Theorem 2.

**4. Proof of Theorem 3.**

The fact that ($\rho$) is sufficient (without ($\alpha$) and ($\delta$)) was established in Corollary 5 to Theorem 2.

We now claim that

$$(\alpha),\ (\delta),\ \ (\widetilde{\mathbf{P}}^n) \triangle (\mathbf{P}^n) \Rightarrow (\rho).$$

By Lemma 10, this is equivalent to

(6.5) $$(\alpha),\ (\delta),\ \ \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k z_{nk} \geqslant N) = 1 \ \text{ for all } N > 0 \Rightarrow (\rho).$$

According to (5.12), for $N \geqslant 1$ and $c \geqslant 1$

$$\{\sup_k z_{nk} \geqslant N\} \subseteq \{\sup_k |X^c_{nk}| \geqslant \log N\} \cup \{\sup_k \alpha_{nk} \geqslant e^c\} \cup \{\inf_k \alpha_{nk} \leqslant e^{-c}\}.$$

Therefore

(6.6) $$\overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k |X^c_{nk}| \geqslant \log N) \geqslant$$
$$\geqslant 1 - \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n(\sup_k \alpha_{nk} \geqslant e^c) - \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathbf{P}}^n(\inf_k \alpha_{nk} \leqslant e^{-c}).$$

Hence we find by ($\alpha$) and ($\delta$) that for every $N \geqslant 1$ and $\varepsilon > 0$ there is a $c = c(\varepsilon) \geqslant 1$ such that

$$\overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathrm{P}}^n (\sup_k | X^c_{nk} | \geqslant \log N) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

By (3.17) with $N > e$

$$\text{(6.7)} \qquad \widetilde{\mathrm{P}}^n (\sup_k | X^c_{nk} | \geqslant \log N) \leqslant \frac{2\,LA(c)}{\log N - 1} + \widetilde{\mathrm{P}}^n (A^n_\infty + B^n_\infty \geqslant 2\,LA(c)),$$

where $A^n_\infty$ and $B^n_\infty$ are defined in the proof of Lemma 8 in §3, $L > 0$, and $0 < A(c) < \infty$ is defined in (5.26).

From (6.6) and (6.7)

$$\text{(6.8)} \quad \overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathrm{P}}^n (A^n_\infty + B^n_\infty \geqslant 2\,LA(c)) \geqslant 1 - \frac{2\,LA(c)}{\log N - 1} \to 1 - \varepsilon, \qquad N \to \infty.$$

Next, using the fact that $\{\sup_k \alpha_{nk} < \infty\}$ we find from (5.26) that

$$A^n_\infty + B^n_\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}^n [\alpha_{nk} u_c (\log \alpha_{nk}) + \alpha_{nk} u_c^2 (\log \alpha_{nk}) \mid \mathscr{F}^n_{k-1}] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}^n [\alpha_{nk} u_c (\log \alpha_{nk}) + \alpha_{nk} u_c^2 (\log \alpha_{nk}) + 1 - \alpha_{nk} \mid \mathscr{F}^n_{k-1}] \leqslant$$

$$\leqslant A(c) \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}^n [(1 - \alpha_{nk}^{1/2})^2 \mid \mathscr{F}^n_{k-1}] = 2A(c) \sum_{k=1}^{\infty} [1 - \mathrm{E}^n (\alpha_{nk}^{1/2} \mid \mathscr{F}^n_{k-1})].$$

Together with (6.8) this shows that

$$\overline{\lim_n}\, \widetilde{\mathrm{P}}^n \Big( \sum_{k=1}^{\infty} [1 - \mathrm{E}^n (\alpha_{nk}^{1/2} \mid \mathscr{F}^n_{k-1})] \geqslant L \Big) \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Since $L$ and $\varepsilon$ are arbitrary this shows that ($\rho$) follows from ($\alpha$), ($\delta$), and $(\widetilde{\mathrm{P}}^n)\ \Delta\ (\mathrm{P}^n)$. This proves the theorem.

## References


[1] L. LeCam, Locally asymptotically normal families of distributions, Univ. of Calif. Publ. Statist. **3** (1960), 37-98. MR **23** # A4197.

[2] G.G. Roussas, Contiguity of probability measures: some applications in statistics, Cambridge University Press, London-New York 1972. MR **50** # 11554.

[3] J. Hájek and Z. Sidák, Theory of rank tests, Academic Press, New York-London 1967. MR **37** # 4925.

[4] H. Witting and G. Nölle, Angewandte mathematische Statistik, Teubner, Stuttgart 1970. MR **49** # 1625.

[5] W.J. Hall and R.M. Loynes, On the concept of contiguity, Ann. Probab. **5** (1977), 278-282. MR **56** # 1543.

[6] J. Oosterhoff and W.R. van Zwet, A note on contiguity and Hellinger distance. Contributions to Statistics, Reidel, Dordrecht 1979, 157-166. MR **81m**:60037.





[7] L. LeCam, On the asymptotic normality of estimates, Proc. of the Symposium to honour Jerzy Neyman (Warsaw 1974), PWN, Warsaw 1977, 203-217. MR **57** # 10882.

[8] G.K. Eagleson, An extended dichotomy theorem for sequences of pairs of Gaussian measures, Ann. Probab. 9 (1981), 453-459. MR **82k**:60083.

[9] ——— and R.F. Gundy, On a theorem of Kabanov, Liptser and Shiryaev (Preprint 1982).

[10] ——— and J. Mémin, Sur la contiguité de deux suites de mésures: généralisation d'un théorème de Kabanov-Liptser-Shiryaev (Preprint 1982)

[11] Yu.M. Kabanov, R.Sh. Liptser, and A.N. Shiryaev, On the question of the absolute continuity and singularity of probability measures, Mat. Sb. **104** (1977), 227-247. MR **58** # 24514.
= Math. USSR Sb. **33** (1977), 203-221.

[12] E. Lenglart, Relation de domination entre deux processus, Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B **13** (1977), 171-179. MR **57** # 10810.

[13] R. Rebolledo, La méthode des martingales appliquée à l'étude de la convergence en loi de processus, Bull. Soc. Math. France Mém. No. 62 (1979). MR **81g**:60002.

[14] U. Müller-Funk, On contiguity and weak convergence with an application to sequential analysis, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 1982.

[15] K. Behnen and G. Neuhaus, A central limit theorem under contiguous alternatives, Ann. Statist. 3 (1975), 1349-1353. MR **52** # 9447.

[16] R.Sh. Liptser and A.N. Shiryaev, *Statistika sluchainykh protsessov*, Nauka, Moscow 1974. MR **55** # 4365.
Translation: Statistics of random processes. I, General theory, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1977. MR **57** # 14125. II, Applications, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1978. MR **58** # 7827.

[17] A.N. Shiryaev, *Veroyatnost'* (Probability), Nauka, Moscow 1980. MR **82d**:60002.



Institute of Control Problems
Institut für Mathematische Stochastik Freiburg
Steklov Mathematical Institute of the Academy of Sciences USSR


Received by the Editors 18 June 1982