Funktionentheorie

Bernd Aulbach, Wintersemester 2003/04

(vorläufig, ohne Abbildungen, mit Schreibfehlern ...)

Inhalt

Fortsetzung im Sommersemester 2004

Literatur

K. Endl und W. Luh: Analysis III, Aula-Verlag (leicht verständlich)

W. Fischer und I. Lieb: Funktionentheorie, Vieweg-Verlag (Standardwerk)

W. Forst und D. Hoffmann: Funktionentheorie erkunden mit Maple, Springer-Verlag (viele Bilder, für Maple-Fans)

A. Herz: Repetitorium Funktionentheorie, Vieweg-Verlag (keine Beweise, viele Aufgaben mit Lösungen)

K. Jänich: Funktionentheorie, Springer-Verlag (sehr kompakt, nur 123 Seiten)

S. Lang: Complex Analysis, Springer-Verlag (Standardwerk in Englisch)

R. Remmert: Funktionentheorie I, Springer-Verlag (erster Teil eines umfassenden Standardwerks)

G. Schmieder: Grundkurs Funktionentheorie, Teubner-Verlag (sehr kompakt, nur 120 Seiten)

1 Komplexe Zahlen und Funktionen

Grundlegende Eigenschaften der komplexen Zahlen und Funktionen. Die meisten Sachverhalte sind aus der elementaren ANALYSIS bekannt und werden daher ohne Beweis rekapituliert.

1.1 Die Gauß'sche Zahlenebene

Motivation: $x^2 + 1 = 0$ hat keine Lösungen in $\mathbb{R}$, es gibt keine invertierbare Multiplikation im $\mathbb{R}^2$

1.1.1 Satz und Definition (Körper der komplexen Zahlen): *Die Menge* $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *der geordneten Paare reeller Zahlen, versehen mit den beiden binären Operationen*

$$\begin{array}{rclcrcl} (a,b) + (c,d) & := & (a+c\,, b+d) & , & + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) \cdot (c,d) & := & (ac - bd\,, ad + bc) & , & \cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

bildet einen mit $\mathbb{C}$ *bezeichneten Körper, den* **Körper der komplexen Zahlen**. *Hierbei ist* $(0,0)$ *das Nullelement,* $(1,0)$ *das Einselement,* $(-a,-b)$ *das Negative von* (a,b) *und* $(\frac{a}{a^2+b^2}\,, \frac{-b}{a^2+b^2})$ *das Reziproke von* (a,b) *(sofern* (a,b) *vom Nullelement* $(0,0)$ *verschieden ist).*

Anschauungsmodell für $\mathbb{C}$: **Gauß'sche Zahlenebene**, **reelle Achse**, **imaginäre Achse** (siehe Abbildung)

Einbettung von $\mathbb{R}$ als Teilkörper in $\mathbb{C}$ (Übungsaufgabe)

$\mathbb{C}$ ist eindimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, aber zweidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum (Basis z.B. $\{(1,0), (0,1)\}$)

imaginäre Einheit $i := (0,1)$. Es gilt

$$i^2 = -1\,. \tag{1.1}$$

Vorsicht ! Wegen $i^2 < 0$ kann $\mathbb{C}$ kein geordneter Körper sein. Es gibt also keine Ungleichungen zwischen komplexen Zahlen.

Wegen $(a,b) = (a,0) + (0,b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1)$ gilt für $z \in \mathbb{C}$ die **additive Standarddarstellung**

$$z \;=\; a + bi\,, \quad a, b \in \mathbb{R}\,. \tag{1.2}$$

a **Realteil**, b **Imaginärteil** von z, i.Z. $\boldsymbol{a = \mathrm{Re}\, z}$, , i.Z. $\boldsymbol{b = \mathrm{Im}\, z}$.

Veranschaulichung der Addition in $\mathbb{C}$ nach „Parallelogrammregel“ (s. Abbildung)

Zu $z = a + bi \in \mathbb{C}$ **konjugiert komplexe Zahl**: $\overline{z} := a - bi$

1.1.2 Satz (Rechenregeln für konjugiert komplexe Zahlen): *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

(a) $\overline{\overline{z}} = z$,

(b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,

(c) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,

(d) $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z\,, \quad z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z$,

(e) $z \neq 0 \implies z \cdot \overline{z} \in \mathbb{R}^+$.

Betrag von $z \in \mathbb{C}$: $|z| \;:=\; \sqrt{z\overline{z}} \;=\; \sqrt{a^2 + b^2}$.

1.1.3 Satz (Rechenregeln für den Betrag): *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

(a) $z \neq 0 \iff |z| > 0$,

(b) $|\overline{z}| = |z|$,

(c) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,

(d) $|\mathrm{Re}\, z| \le |z|\,, \ |\mathrm{Im}\, z| \le |z|$,

(e) $|z + w| \le |z| + |w|$, ***Dreiecksungleichung (nach oben)***

(f) $|z + w| \ge \big||z| - |w|\big|$. ***Dreiecksungleichung nach unten***

*Ferner gilt für alle $z_1, \ldots, z_n, w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ die **Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung**:*

(g) $\Big|\sum\limits_{k=1}^{n} z_k w_k\Big|^2 \le \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} |z_k|^2\Big) \cdot \Big(\sum\limits_{k=1}^{n} |w_k|^2\Big)$.

multiplikative Standarddarstellung mit **Winkel** $\varphi \in [0, 2\pi)$ und **Länge** $r := |z|$:

$$z \;=\; r\,e^{i\varphi} \;:=\; r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)\,. \tag{1.3}$$

Beachte! Im Moment ist $e^{i\varphi}$ nur eine Abkürzung für $\cos\varphi + i\sin\varphi$.

Zur Veranschaulichung der Multiplikation in $\mathbb{C}$: Beträge werden multipliziert, Winkel addiert (siehe Abbildung)

Umrechnungsformeln für $a + ib = r\,e^{i\varphi}$:

$$a = r\cos\varphi\,, \quad b = r\sin\varphi\,, \tag{1.4}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad \varphi = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a}\,, & \text{falls } a \neq 0\,, \\ \operatorname{arcctg}\frac{a}{b}\,, & \text{falls } b \neq 0\,. \end{cases} \tag{1.5}$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich mit Induktion die **de Moivre'sche Formel**, d.h., für $z = r\,(cos\varphi + i\sin\varphi)$ gilt

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)} \tag{1.6}$$

Zur Umkehrung von Potenzen mit *natürlichen* Exponenten gilt der folgende Satz (siehe Abbildung):

1.1.4 Satz (n-te Wurzeln): *Zu jeder von 0 verschiedenen komplexen Zahl $w = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau n paarweise verschiedene komplexe Zahlen $z_0, \dots, z_{n-1}$, deren n-te Potenz gleich w ist, nämlich*

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, \dots, n-1\,.$$

Beweis: Man macht den Ansatz $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ und schließt mit der Formel (1.6) auf $\rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Daraus folgt $\rho^n = r$ und $n\theta = \varphi + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Wegen der Periodizität von Sinus und Cosinus gibt es genau die im Satz angegebenen n paarweise verschiedenen Zahlen. ■

Im Spezialfall $w = 1$ heißen die im Satz 1.1.4 beschriebenen Zahlen

$$\zeta_k := e^{2k\pi i/n}\,, \quad k = 0, \dots, n-1 \tag{1.7}$$

***n*-te Einheitswurzeln**, und ζ_1 heißt **primitive** n-te Einheitswurzel. Offensichtlich gilt (siehe Abbildung)

$$\zeta_k := \zeta_1^k \quad \text{für } k = 0, \dots, n-1\,. \tag{1.8}$$

Beachte den Unterschied zu $\mathbb{R}$: Höchstens zwei der n paarweise verschiedenen Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ liegen in $\mathbb{R}$, nämlich 1 und gegebenenfalls, d.h., wenn n ungerade ist, -1.

Topologie von $\mathbb{C}$: $\mathbb{C}$ ist bezüglich des Betrags $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_0^+$ ein normierter Raum; zudem ist $\mathbb{C}$ vollständig. Insgesamt ist also $\mathbb{C}$ ein Banachraum – und bezüglich der Metrik $d(a,b) := |a-b|$ ein vollständiger metrischer Raum.

In $\mathbb{C}$ liegen also alle Begriffe der Analysis vor, die sich auf metrische Räume beziehen, und es gelten alle diesbezüglichen Aussagen.

Aufgaben

1. Zeigen Sie, dass die reelle Achse $\{(a,0) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\}$ ein zu $\mathbb{R}$ isomorpher Teilkörper von $\mathbb{C}$ ist.

2. Geben Sie ein Beispiel für das Hadamard'sche "Prinzip des kürzesten Weges durchs Komplexe", indem Sie folgende Formeln zunächst mit reellen Mitteln zu beweisen versuchen, und dann auf dem Weg durchs Komplexe beweisen:

$$\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x\,, \quad \tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

3. Laut Vorlesung ist die Menge G_n der n-ten Einheitswurzeln ist eine zyklische Untergruppe der Ordnung n des Einheitskreises $\mathbb{S}^1$. Zeigen Sie:

(a) Auch die Mengen $G := \bigcup_{n=0}^{\infty} G_n$ und $H := \bigcup_{n=0}^{\infty} G_{2^n}$ sind Untergruppen von $\mathbb{S}^1$.

(b) Die Untergruppen G und H sind dicht in $\mathbb{S}^1$.

1.2 Die Riemann'sche Zahlenkugel

Anders als in der Reellen Analysis, wo die beiden Symbole ∞ und $-\infty$ auftreten, betrachtet man in der Komplexen Analysis nur *eine* Form von „Unendlich“. Man assoziiert zu $\mathbb{C}$ das Symbol ∞ und nennt

$$\overline{\mathbb{C}} \;:=\; \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

die **erweiterte komplexe Zahlenebene**. Das Symbol ∞ bezeichnet man auch als **unendlich fernen Punkt**.

Für das Rechnen in $\overline{\mathbb{C}}$ erweitert man – unter Beibehaltung der Kommutativität – die im Körper $\mathbb{C}$ gültigen Rechenregeln wie folgt:

$$\begin{aligned} a \pm \infty &= \infty \quad \text{und} \quad \tfrac{a}{\infty} = 0 \quad \text{für alle } a \in \mathbb{C}\,, \\ a \cdot \infty &= \infty \quad \text{und} \quad \tfrac{a}{\infty} = \infty \quad \text{für alle } a \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}\,, \\ \infty + \infty &= \infty \cdot \infty = \infty\,. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$ und $\infty - \infty$ bleiben – wie im Reellen – undefiniert.

Neben der geometrische Interpretation von $\overline{\mathbb{C}}$ als Ebene mit dem unendlich fernen Punkt ∞ kann man sich $\overline{\mathbb{C}}$ auch als Kugel mit dem Punkt ∞ als Nordpol veranschaulichen. Das geschieht wie folgt (siehe Abbildung): Wir betrachten die zweidimensionale Sphäre

$$\mathbb{S}^2 \;:=\; \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4}\right\}$$

mit Mittelpunkt $(0, 0, \frac{1}{2})$ und Radius $\frac{1}{2}$. Dann definieren wir die so genannte **stereografische Projektion**, die den Nordpol $(0, 0, 1)$ der Sphäre geradlinig mit den Punkten auf der Ebene $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$, die wir mit $\mathbb{C}$ identifizieren, verbindet. Auf diese Weise entspricht jedem Punkt der Sphäre $\mathbb{S}^2$ – mit Ausnahme des Nordpols – genau ein Punkt von $\mathbb{C}$, und der Nordpol entspricht dem unendlich fernen Punkt ∞. Die stereografische Projektion $p : \mathbb{S}^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ hat die explizite Form

$$p(x) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{1}{1 - x_3}\,(x_1 + i x_2) & \text{für } x \neq (0, 0, 1)\,, \\ \infty & \text{für } x = (0, 0, 1)\,. \end{cases} \tag{1.9}$$

Ihre Umkehrfunktion $p^{-1} : \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{S}^2$ ist (Übungsaufgabe)

$$p^{-1}(z) \;=\; \begin{cases} \left(\dfrac{\operatorname{Re} z}{1 + |z|^2}\,, \dfrac{\operatorname{Im} z}{1 + |z|^2}\,, \dfrac{|z|^2}{1 + |z|^2}\right) & \text{für } z \in \mathbb{C}\,, \\ (0, 0, 1) & \text{für } z = \infty\,. \end{cases} \tag{1.10}$$

Da $\mathbb{S}^2$ in kanonischer Weise ein kompakter metrischer Raum ist – bezüglich der euklidischen Metrik $d_{\mathbb{R}^3}$ des $\mathbb{R}^3$ –, lässt sich mit Hilfe der bijektiven Abbildung $p : \mathbb{S}^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ eine Metrik auf $\overline{\mathbb{C}}$ einführen, die so genannte **sphärische** oder **chordale Metrik**

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(z, w) \ := \ d_{\mathbb{R}^3}\left(p^{-1}(z)\,, p^{-1}(w)\right) \, . \tag{1.11}$$

Bezüglich der beiden metrischen Räume $\mathbb{S}^2$ und $\overline{\mathbb{C}}$ erweist sich die stereografische Projektion $p : \mathbb{S}^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ als Homöomorphismus, der es folglich erlaubt, $\overline{\mathbb{C}}$ als zu $\mathbb{S}^2$ homöomorphen kompakten metrischen Raum zu behandeln (Übungsaufgabe).

Wegen dieser Homöomorphie bezeichnet man neben der Sphäre $\mathbb{S}^2$ auch den Raum $\overline{\mathbb{C}}$ als **Riemann'sche Zahlenkugel**[1], und beides als **Ein-Punkt-Kompaktifizierung** der Gauß'schen Zahlenebene.

Aufgaben

1. Beweisen Sie die im Zusammenhang mit der stereografischen Projektion $p : \mathbb{S}^2 \to \overline{\mathbb{C}}$ und der sphärischen Metrik $d_{\overline{\mathbb{C}}} : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}_0^+$ gemachten Aussagen der Vorlesung.
2. Zeigen Sie:
   (a) Die sphärische Metrik besitzt die Darstellung

$$d_{\overline{\mathbb{C}}}(z, w) \ = \ \begin{cases} \dfrac{|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}} & \text{für } \ z, w \in \mathbb{C}\,, \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} & \text{für } \ z \in \mathbb{C}\,, \ w = \infty\,, \\[2ex] 0 & \text{für } \ z = w = \infty\,. \end{cases}$$

   (b) Die durch $f(z) := \frac{1}{z}$ definierte Abbildung $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ ist eine Isometrie, d.h., es gilt $d_{\overline{\mathbb{C}}}\left(f(z)\,, f(w)\right) = d_{\overline{\mathbb{C}}}\left(z\,, w\right)$ für alle $z, w \in \overline{\mathbb{C}}$.

[1] Zuweilen wählt man für die Riemann'sche Zahlenkugel – und damit die stereografische Projektion – eine geringfügig andere geometrische Konstellation, indem man den Südpol der Kugel auf den Koordinatenursprung der Gauß'schen Zahlenebene legt. Die prinzipiellen Überlegungen bleiben aber die gleichen.

1.3 Folgen und Reihen

Aus der elementaren ANALYSIS sind bekannt: Der Satz von Bolzano-Weierstraß für Folgen komplexer Zahlen, das Cauchy-Kriterium für Folgen und Reihen komplexer Zahlen und Funktionen, das Majoranten-, das Wurzel- und das Quotientenkriterium für Reihen komplexer Zahlen, ferner das Weierstraß-Kriterium für Reihen komplexer Funktionen, schließlich der Satz über das Konvergenzverhalten von Potenzreihen.

Neben den aus der elementaren ANALYSIS bekannten Konvergenzbegriffen benötigt man in der FUNKTIONENTHEORIE noch weitere. Zwei davon führen wir jetzt ein.

1.3.1 Definition: *Es sei A eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : A \to \mathbb{C}$. Diese Folge heißt dann*

(i) ***lokal-gleichmäßig konvergent****, wenn es zu jedem Punkt $z \in A$ eine Umgebung $U = U(z) \subseteq A$ gibt, sodass die auf U eingeschränkte Folge $(f_n|_U)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert.*

(ii) ***kompakt konvergent****, wenn sie auf jeder kompakten Teilmenge von A gleichmäßig konvergiert.*

Dass diese beiden Begriffsbildungen auf offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ sogar gleichwertig sind, besagt der folgende Satz.

1.3.2 Satz (Äquivalenz von kompakter und lokal-gleichmäßiger Konvergenz): *Ist A eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, so ist eine Folge von Funktionen $f_n : A \to \mathbb{C}$ genau dann kompakt konvergent, wenn sie lokal-gleichmäßig konvergent ist.*

Beweis: Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei lokal-gleichmäßig konvergent, und K sei eine beliebige kompakte Teilmenge von A. Dann gibt es zu jedem $z \in A$ eine offene Umgebung $U(z) \subseteq A$ von z, auf der die Folge gleichmäßig konvergiert. Da K kompakt ist, genügen endlich viele dieser Umgebungen zur Überdeckung von K, und da die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf der Vereinigung dieser endlich vielen Umgebungen gleichmäßig konvergiert, gilt dies auch auf K.

Die umgekehrte Richtung folgt sofort aus der Tatsache, dass jeder Punkt der offenen Menge A eine kompakte, in A liegende Umgebung besitzt. ■

Der aus der ANALYSIS bekannten Satz, dass die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen stetig ist, gilt offensichtlich auch unter der abgeschwächten Voraussetzung der lokal-gleichmäßigen Konvergenz, denn diese liefert für jeden Punkt die Stetigkeit der Grenzfunktion in einer Umgebung dieses Punktes.

Für die Funktionentheorie wichtiger ist der folgende Sachverhalt.

1.3.3 Satz (Konvergenz von Potenzreihen): *Jede Potenzreihe ist in ihrer Konvergenzkreisscheibe kompakt konvergent und besitzt daher eine stetige Grenzfunktion.*

Beweis: Bezeichnet z_0 den Entwicklungsmittelpunkt und ρ den Konvergenzradius der gegebenen Potenzreihe, so gibt es zu jedem Punkt $w \in U_\rho(z_0)$ ein positives $\alpha < \rho$ mit $w \in U_\alpha(z_0)$. Nach einem Satz der ANALYSIS ist die Potenzreihe auf $\overline{U_\alpha(z_0)}$ gleichmäßig konvergent. Damit ist die lokal-gleichmäßige Konvergenz gezeigt, und diese ist – da die Konvergenzkreisscheibe offen ist – gleichwertig mit kompakter Konvergenz. ■

Aufgaben

1. Zeigen Sie, dass für jedes z auf dem Einheitskreis $\mathbb{S}^1$ das Bild der Folge $z_k := ze^{2\pi ik\lambda}$, $k \in \mathbb{N}$, bei irrationalem λ dicht in $\mathbb{S}^1$ liegt. Was geschieht in Fall eines rationalen λ?

1.4 Elementare Funktionen

Unter einer **komplexen Funktion** verstehen wir generell eine Funktion, die komplexen Zahlen aus einer Teilmenge A von $\mathbb{C}$ komplexe Werte zuweist. Zu jeder solchen Funktion

$$f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

gehören in kanonischer Weise die beiden reellen Funktionen

$$u : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad v : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \tag{1.12}$$

die gemäß

$$f(x+iy) \;=\; u(x,y) + i\,v(x,y) \tag{1.13}$$

definiert sind. Man nennt u den **Realteil** und v den **Imaginärteil** von f. Sind umgekehrt zwei reelle Funktionen wie in (1.12) gegeben, so definiert (1.13) eine komplexe Funktion $f : A \to \mathbb{C}$. Wir nennen das Paar von Funktionen (u, v) die **reelle Darstellung** von f.

Besonders einfache, auf ganz $\mathbb{C}$ definierte komplexe Funktionen sind:

$$z \mapsto \overline{z}\,, \quad z \mapsto |z|\,, \quad z \mapsto \operatorname{Re} z\,, \quad z \mapsto \operatorname{Im} z\,,$$

Polynome $\quad z \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\,, \quad a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}\,,$

rationale Funktionen $\quad z \mapsto \dfrac{p(z)}{q(z)}\,, \quad p(z), q(z)$ Polynome.

1.4.1 Die Argumentfunktion

Aus der ANALYSIS ist bekannt, dass die Funktion[2]

$$f_0(x) \;:=\; \cos x + i \sin x\,, \quad f_0 : [-\pi, \pi) \to \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

bijektiv ist. Mit Hilfe der zugehörigen Umkehrfunktion f_0^{-1} definiert man die

Argumentfunktion $\quad \arg z \;:=\; f_0^{-1}\left(\frac{z}{|z|}\right)\,, \quad \mathbb{C} \setminus \{0\} \to [-\pi, \pi)\,.$

Angesichts der „Mehrdeutigkeit der Winkelmessung“ nennt man die Funktion arg auch den **Hauptzweig** der Argumentfunktion, und für jedes $k \in \mathbb{Z}$ nennt man die Funktion

$$\arg_k z \;:=\; \arg z + 2k\pi\,, \quad \arg_k : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to [(2k-1)\pi, (2k+1)\pi)$$

einen **Zweig** der Argumentfunktion, im Fall $k \neq 0$ einen **Nebenzweig**. Offensichtlich gilt $\arg = \arg_0$.

[2] Das Intervalls $[-\pi, \pi)$ ist als Definitionsbereich von f_0 für die KOMPLEXE ANALYSIS vorteilhafter als das in der REELLEN ANALYSIS übliche Intervall $[0, 2\pi)$. Der Grund hierfür wird im nächsten Abschnitt bei der Einführung des komplexen Logarithmus ersichtlich.

Es gilt z. B.

$$\arg i = \frac{\pi}{2}\,, \quad \text{allgemeiner} \quad \arg_k i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$
$$\arg(-1) = -\pi\,, \quad \text{allgemeiner} \quad \arg_k(-1) = 2k\pi - \pi \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Dies impliziert

$$\arg(i \cdot i) = -\pi \neq \pi = \arg i + \arg i\,,$$

d.h., die naiverweise erwartete Identität $\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w$ ist nur eine „Modulo-Identität"

$$\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w \mod 2\pi \quad \text{für alle} \quad z, w \in \mathbb{C}\,. \tag{1.14}$$

Die Begründung hierfür ergibt sich mit den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus aus $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot s(\cos\psi + i\sin\psi) = rs(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)$.

1.4.2 Möbius-Transformationen

Eine für gegebene $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ mit $ad - bc \neq 0$ definierte Funktion

$$f(z) := \frac{az+b}{cz+d}\,, \quad f : \mathbb{C} \setminus \{-\tfrac{d}{c}\} \to \mathbb{C} \tag{1.15}$$

(im Fall $c = 0$ ist sie auf ganz $\mathbb{C}$ definiert) heißt **gebrochen lineare Funktion** oder **Möbius-Transformation**. Die Voraussetzung an die Koeffizienten a, b, c, d schließt aus, dass es sich um eine konstante Funktion handelt, und dass der Ausdruck $\frac{d}{c}$ undefiniert ist.

1.4.1 Satz (Homöomorphie der Möbius-Transformationen): *Die Möbius-Transformation (1.15) bildet die Menge $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ homöomorph auf die Menge $\mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ ab. Die zugehörige Umkehrfunktion ist*

$$f^{-1}(w) = \frac{b - dw}{cw - a}\,, \quad f^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{a}{c}\} \to \mathbb{C} \setminus \{-\tfrac{d}{c}\}\,.$$

Beweis: Die Bijektivität folgt aus den für alle $w \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ bzw. $z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ gültigen Identitäten

$$\frac{a\frac{b-dw}{cw-a} + b}{c\frac{b-dw}{cw-a} + d} = \frac{ab - adw + bcw - ab}{bc - cdw + cdw - ad} = \frac{(bc-ad)w}{bc-ad} = w\,,$$

$$\frac{b - d\frac{az+b}{cz+d}}{c\frac{az+b}{cz+d} - a} = \frac{bcz + bd - adz - bd}{acz + bc - acz - ad} = \frac{(bc-ad)z}{bc-ad} = z\,.$$

Die Stetigkeit von f und f^{-1} ist offensichtlich. ■

Die Komplikationen mit den Ausnahmepunkten $\frac{a}{c}$ und $-\frac{d}{c}$ lassen sich am einfachsten beheben, indem man die Möbius-Transformation (1.15) in kanonischer Weise zu einer Abbildung von $\overline{\mathbb{C}}$ nach $\overline{\mathbb{C}}$ fortsetzt, und zwar wie folgt:

$$f(z) := \begin{cases} \dfrac{az+b}{cz+d} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}\,, \\ \infty & \text{für } z = -\frac{d}{c}\,, \\ \dfrac{a}{c} & \text{für } z = \infty\,. \end{cases} \tag{1.16}$$

Im Hinblick auf die Untersuchung des Abbildungsverhaltens von Möbius-Transformationen ist bemerkenswert, dass sich jede solche Abbildung als Hintereinanderausführung von besonders einfachen Möbius-Transformationen schreiben lässt. Diese sind (mit $A, B \in \mathbb{C}$)

$$\begin{array}{rccl} \textbf{Drehstreckung} & z & \mapsto & Az \\ \textbf{Translation} & z & \mapsto & z+B \\ \textbf{Inversion} & z & \mapsto & \dfrac{1}{z} \end{array}$$

Der Grund hierfür ist, dass sich jede Funktion der Form $\frac{az+b}{cz+d}$ wie folgt darstellen lässt:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{a}{d}\,z + \dfrac{b}{d}\,, & \text{falls } c = 0\,, \\ \dfrac{a}{c} - \dfrac{ad-bc}{c}\,\dfrac{1}{cz+d}\,, & \text{falls } c \neq 0\,. \end{cases}$$

1.4.2 Beispiel: Wirkung der Inversion $z \mapsto z$ auf verschiedene Kreise. Solche durch 0 werden auf Geraden abgebildet, die anderen auf Kreise. Ferner sieht man, dass man jeweils nur drei Punkte abbilden muss, um das Bild der Ausgangskreises zu erkennen. $\Diamond$

Die in diesem Beispiel entdeckten Phänomene werden mit dem folgenden Satz in der Theorie verankert und mit dem Begriff **Kreisverwandtschaft** belegt.

1.4.3 Satz *(Wirkung von Möbius-Transformationen auf Kreise und Geraden)*: *Ist $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ eine Möbius-Transformation und S ein Kreis oder eine Gerade in $\mathbb{C}$, so ist auch $f(S)$ ein Kreis oder eine Gerade in $\mathbb{C}$.*

1.4.4 Bemerkungen: 1. Man beachte, dass der Satz *nicht* besagt, dass Kreise auf Kreise und Geraden auf Geraden abgebildet werden (siehe Beispiel 1.4.2).

2. Da es auf der Zahlenkugel $\mathbb{S}^2$ keine Geraden gibt – den Geraden in der Ebene $\overline{\mathbb{C}}$ entsprechen die Kreise auf $\mathbb{S}^2$ durch den Nordpol – lautet der Satz auf $\mathbb{S}^2$ wie folgt: Jede Möbius-Transformation $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ bildet Kreise auf Kreise ab. $\square$

Beweis von Satz 1.4.3: Übungsaufgabe

Wie man zu einem beabsichtigten Abbildungsverhalten eine Möbius-Transformation findet, die das Gewünschte leistet, besagt der folgende Satz. Man beachte in diesem Zusammenhang, dass die Vorgabe dreier Punkte einen Kreis oder eine Gerade eindeutig festlegen.

1.4.5 Satz *(Bestimmung einer Möbius-Transformation mit vorgegebenem Abbildungsverhalten)*: *In $\overline{\mathbb{C}}$ seien jeweils drei paarweise verschiedene Punkte z_1, z_2, z_3 und w_1, w_2, w_3 gegeben. Dann gibt es genau eine Möbius-Transformation $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ mit $f(z_k) = w_k$ für $k = 1, 2, 3$. Die zugehörige Beziehung $w = f(z)$ erhält man, indem man die Gleichung*

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \tag{1.17}$$

nach w auflöst, was offensichtlich stets in eindeutiger Weise möglich ist.

Beweis: Existenz: Setzt man der Reihe nach z_1, z_2, z_3 in die Gleichung (1.17) ein, so erhält man zunächst $\frac{w-w_1}{w-w_2} = 0$ bzw. $\frac{w-w_1}{w-w_2} = \infty$ bzw. $\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = 1$ und damit schließlich die w-Werte w_1 bzw. w_2 bzw. w_3.

Eindeutigkeit: Um die Rechnung übersichtlich zu halten, wählen wir (ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit) $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$ und $w_3 = 1$. Die Funktion

$$f(z) := \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}\,, \quad f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$$

ist dann augenscheinlich eine Möbius-Transformation der gesuchten Art. Nehmen wir nun an,

$$g(z) := \frac{az + b}{cz + d}\,, \quad g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$$

wäre eine weitere solche Funktion, dann hieße dies $az_1 + b = 0$, $cz_2 + d = 0$ und $az_3 + b = cz_3 + d$. Hieraus folgt zunächst $-\frac{b}{z_1} z_3 + b = -\frac{d}{z_2} z_3 + d$ und weiter $\frac{b}{z_1}(z_1 - z_3) = \frac{d}{z_2}(z_2 - z_3)$ und schließlich $\frac{bz_2}{dz_1} = \frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}$. Insgesamt erhalten wir

$$g(z) = \frac{-\frac{b}{z_1} z + b}{-\frac{d}{z_2} z + d} = \frac{b(1 - \frac{z}{z_1})}{d(1 - \frac{z}{z_2})} = \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \cdot \frac{b z_2}{d z_1} = \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = f(z)\,.$$

Damit ist der Satz 1.4.5 bewiesen. ■

Bevor wir ein konkretes Beispiel einer Möbius-Transformation mit vorgegebenem Abbildungsverhalten bestimmen, erinnern wir an den aus der ANALYSIS bekannten Sachverhalt, dass stetige Funktionen zusammenhängende Mengen auf zusammenhängende Mengen abbilden.

1.4.6 Beispiel: Wir stellen uns die Aufgabe, eine Möbius-Transformation zu bestimmen, die die rechte Halbebene $H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ auf das Äußere der kompakten Einheitskreisscheibe abbildet, also auf die Menge $\mathbb{C} \setminus \overline{U_1(0)}$.

Um eine Möbius-Transformation zu finden, die die Ränder dieser Gebiete aufeinander abbildet – also die imaginäre Achse und den Einheitskreis –, wählen wir die Punkte

$$\begin{aligned} &z_1 := i\,,\quad z_2 := 0\,,\quad z_3 := -i \quad \text{auf der imaginären Achse}\,,\\ &w_1 := i\,,\quad w_2 := -1\,,\quad w_3 := -i \quad \text{auf dem Einheitskreis}\,. \end{aligned}$$

Eine Möglichkeit, die nach Satz 1.4.5 eindeutig bestimmte Möbius-Transformation finden, die z_1, z_2, z_3 auf w_1, w_2, w_3 abbildet, liefert die Formel (1.17). Eine andere – meist bevorzugte – Methode besteht darin, einen Ansatz der Form $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit unbestimmten Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ zu machen und durch Einsetzen der gegebenen Punkte Bedingungen zur Berechnung der Koeffizienten herzuleiten.

Wir wählen den zweiten Weg und stellen sogleich fest, dass im vorliegenden Fall eine Gerade in einen Kreis abgebildet werden soll. Das bedeutet, dass der Koeffizient c nicht 0 sein kann, und wir daher (Erweiterung mit $\frac{1}{c}$) gleich mit dem vereinfachten Ansatz

$$f(z) \;=\; \frac{az+b}{z+d}$$

arbeiten können. Die Bedingungen $w_k = f(z_k)$, $i = 1, 2, 3$, liefern dann das aus den drei Gleichungen $i(i+d) = ai+b$, $-d = b$ und $i(c-i) = -ai+b$ bestehende lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -i & -1 & i \\ 0 & 1 & 1 \\ i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der eindeutig bestimmten Lösung $a = 1$, $b = -1$, $d = 1$. Damit ist

$$f(z) \;=\; \frac{z-1}{z+1}$$

eine Möbius-Transformation, die die imaginäre Achse auf den Einheitskreis abbildet. Die beiden von der imaginären Achse getrennten Halbebenen werden dann auf $U_1(0)$ bzw. $\mathbb{C} \setminus \overline{U_1(0)}$ abgebildet, denn $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ ist bijektiv und bildet Halbebenen auf zusammenhängende Mengen ab. Welche der beiden Möglichkeiten hier vorliegt, erkannt man etwa daran, dass der in H liegende Punkt 1 auf 0 und damit in die Kreisscheibe $U_1(0)$ abgebildet wird. Folglich ist f noch nicht die gesuchte Möbius-Transformation. Diese lässt sich aber leicht entweder durch Vorschalten der Drehstreckung $z \mapsto -z$ oder Nachschalten der Inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$ erzeugen. Beide Operationen liefern in Form der Abbildung

$$g(z) \;=\; \frac{z+1}{z-1}\,, \quad g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$$

eine Möbius-Transformation mit der Eigenschaft $g(H) = \mathbb{C} \setminus \overline{U_1(0)}$. $\Diamond$

1.4.3 Die Exponentialfunktion

Die wohl wichtigste Funktion überhaupt ist die

$$\textbf{Exponentialfunktion} \quad \exp z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\,, \quad \exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,.$$

Ihren Eigenschaften ist der folgende Satz gewidmet.

1.4.7 Satz ***(Eigenschaften der Exponentialfunktion):*** *Die Funktion* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist stetig, und für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt:*

(a) $\exp(z+w) = (\exp z)(\exp w)$, ***Additionstheorem***

(b) $\exp z \neq 0$,

(c) $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$,

(d) $\exp z = e^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z) + i \sin(\operatorname{Im} z))$,

(e) $\exp(\frac{\pi i}{2}) = i$, $\exp(\pi i) = -1$, $\exp(\frac{3\pi i}{2}) = -i$, $\exp(2\pi i) = 1$,

(f) $\exp(z+w) = \exp(z) \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}$ *mit* $w = 2k\pi i$,

(g) $\exp(z) = 1 \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}$ *mit* $z = 2k\pi i$.

Beweis: Als Grenzfunktion einer Potenzreihe ist die Exponentialfunktion trivialerweise stetig.

(a) Die linke Seite ist – wie in der ANALYSIS gezeigt – gerade das Cauchy-Produkt der beiden rechts stehenden Reihen.

(b) Nach (a) gilt $(\exp z)(\exp(-z)) = \exp 0 = 1$. Da $\mathbb{C}$ – wie jeder Körper – nullteilerfrei ist, folgt $\exp z \neq 0$.

(c) Wurde in (b) mitbewiesen.

(d) Wir schreiben $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, und benutzen die Reihendarstellungen der reellen Exponentialfunktion sowie Sinus und Cosinus. Da offensichtlich $\exp x = e^x$ gilt, genügt wegen (a) der Nachweis der Beziehung $\exp(iy) = \cos y + i \sin y$. Dass Letzter gilt, sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned}
\exp(iy) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos y + i \sin y\,.
\end{aligned}$$

(e) Nach (d) gilt $\exp(\frac{\pi i}{2}) = e^0(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = i$. Der Rest folgt analog.

(f) $\exp(z+w) = \exp z \overset{(a),(b)}{\iff} \exp w = 1 \overset{w=x+iy}{\iff} e^x(\cos y + i\sin y) = 1 \iff e^x\cos y = 1$ und $e^s \sin y = 0 \iff \exists\, k\in\mathbb{Z}$ mit $y = 2k\pi$ und $s = 0$.

(g) Folgt aus (f) mit $w = -z$. ■

Wir halten zwei unmittelbare Folgerungen aus Satz 1.4.7 fest: Nach Aussage (d) hat die multiplikative Standarddarstellung komplexer Zahlen jetzt die Form

$$z \;=\; |z|\exp(i\arg_k z) \quad \text{für alle } k\in\mathbb{Z} \text{ und } z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\,. \tag{1.18}$$

Nach Aussage (f) gilt

$$\exp(z+2\pi i) \;=\; \exp z \quad \text{für alle } z\in\mathbb{C}\,. \tag{1.19}$$

Die Exponentialfunktion ist daher periodisch mit der Periode $2\pi i$ und folglich nicht injektiv. Der folgende Satz beschreibt eine Familie von besonders einfachen „Injektivitätsbereichen" der Exponentialfunktion.

1.4.8 Satz *(Injektivitätsbereiche der Exponentialfunktion)*: *Für jedes $k\in\mathbb{Z}$ ist die Einschränkung der Exponentialfunktion* exp *auf den* ***Streifen*** $S_k := \{z\in\mathbb{C} : (2k-1)\pi \le \operatorname{Im} z < (2k+1)\pi\}$ *eine Bijektion von S_k auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.*

Beweis: Die Funktion $\exp|_{S_k}$ ist injektiv, denn aus $z_1, z_2 \in S_k$ mit $\exp z_1 = \exp z_2$ folgt nach Satz 1.4.7 zunächst $\exp(z_1 - z_2) = 1$ und weiter $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ für ein $k\in\mathbb{Z}$. Folglich gilt $\operatorname{Im}\,(z_1-z_2) = 2k\pi$. Wegen $z_1, z_2\in S_k$ gilt andererseits $0 \le \operatorname{Im}\, z_1 - \operatorname{Im}\, z_2 < 2\pi$. Insgesamt folgt also $k=0$ und damit $z_1 = z_2$.

Um zu beliebigem $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ und $k\in\mathbb{Z}$ ein exp-Urbild in S_k zu finden, schreiben wir w gemäß (1.18) in der Form $w = |w|\exp(i\arg_k w)$. Für die komplexe Zahl

$$z \;:=\; \ln|w| + i\arg_k w$$

gilt dann $z\in S_k$, und unter Verwendung von Satz 1.4.7 und (1.18) gilt

$$\exp(\ln|w| + i\arg_k w) = \exp(\ln|w|)\cdot\exp(i\arg_k z) = e^{\ln|w|}\exp(i\arg_k) = w\,.$$

Damit ist z das gesuchte exp-Urbild von w in S_k. ■

1.4.4 Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

Aufs Engste verwandt mit der Exponentialfunktion sind die

$$\textbf{Sinusfunktion} \qquad \sin z := \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}\,, \qquad \sin:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$

und die

$$\textbf{Cosinusfunktion} \qquad \cos z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}\,, \qquad \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\,.$$

Die grundlegenden Eigenschaften der auch kurz **Sinus** bzw. **Cosinus** genannten Funktionen beschreibt der folgende, aus der ANALYSIS bekannte, Satz.

1.4.9 Satz ***(Eigenschaften von Sinus und Cosinus):*** *Die Funktionen* $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *und* $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *sind stetig, der Sinus ist ungerade, der Cosinus gerade, und für alle* $z, w \in \mathbb{C}$ *gilt:*

(a) $\cos z + i \sin z = \exp(iz)$,

(b) $\sin z = \frac{1}{2i}\big(\exp(iz) - \exp(-iz)\big)$, $\quad \cos z = \frac{1}{2}\big(\exp(iz) + \exp(-iz)\big)$,

(c) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,

(d) $\sin(z + w) = (\sin z) \cdot (\cos w) + (\cos z) \cdot (\sin w)$,

(e) $\cos(z + w) = (\cos z) \cdot (\cos w) - (\sin z) \cdot (\sin w)$.

Die Beziehungen (d) und (e) heißen **Additionstheoreme** *des Sinus bzw. Cosinus. Aus diesen ergibt sich insbesondere für* $w = 2\pi$*, dass beide Funktionen die reelle Periode* 2π *besitzen.*

Beachte folgenden Unterschied zu $\mathbb{R}$: Die komplexen Funktionen sin und cos sind nicht beschränkt. Wegen Aussage (b) von Satz 1.4.9 gilt nämlich

$$|\sin(iy)| = \tfrac{1}{2}\,|e^{-y} - e^{y}| \quad \text{und} \quad |\cos(iy)| = \tfrac{1}{2}\,|e^{-y} + e^{y}| \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}\,.$$

Mit den gleichen Formeln wie in der REELLEN ANALYSIS definiert man die anderen trigonometrischen Funktionen $\tan z$, $\cot z$ und die vier hyperbolischen Funktionen. Zu beachten ist bei diesen Definitionen, ob die in den Nennern auftretenden Funktionen über die bekannten, auf der reellen Achse liegenden, Nullstellen noch weitere nicht-reelle Nullstellen besitzen (vgl. Übungsaufgabe).

Aufgaben

1. Wie sehen die Bilder bzw. Urbilder von horizontalen und vertikalen Geraden in $\mathbb{C}$ unter der Abbildung $z \mapsto z^2$ aus?
2. Jemand versucht die Mathematik durch den Beweis zu erschüttern, dass alle komplexen Zahlen reell sind. Er „argumentiert“ wie folgt: Für jede komplexe Zahl $z \neq 0$ gilt

$$z = |z| \cdot e^{i \arg z} = |z| \cdot e^{2\pi i \frac{\arg z}{2\pi}} = |z| \cdot \left(e^{2\pi i}\right)^{\frac{\arg z}{2\pi}} = |z| \cdot 1^{\frac{\arg z}{2\pi}} = |z| \in \mathbb{R}\,.$$

Retten Sie die Mathematik!

3. (a) Bestimmen Sie eine Möbius-Transformation, die die Kreisscheibe $U_2(2)$ auf die obere Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z > 0\}$ abbildet.

(b) Lässt sich die „Mondsichel“ $U_2(2) \setminus \overline{U_1(1)}$ mit Hilfe einer Möbius-Transformation auf einen horizontalen Streifen der Form $\{z \in \mathbb{C} : \alpha < \mathrm{Im}\ z < \beta\}$, $\alpha < \beta$, abbilden?

4. Beantworten Sie für die komplexe Sinus- und Cosinusfunktion folgende Fragen, jeweils mit Begründung:

(a) Gibt es nicht-reelle Nullstellen?

(b) Wird jedes $w \in \mathbb{C}$ als Bild angenommen?

Bestimmen Sie ferner für jedes Element des Bildbereichs alle Urbilder.

1.5 Mehrwertige Funktionen

Hinter der im strengen Wortsinn widersprüchlichen Überschrift verbirgt sich die Absicht, zur – bekanntlich nicht injektiven – komplexen Exponentialfunktion eine Art Umkehrfunktion einzuführen und auf diese Weise – wie in der reellen Analysis – die Logarithmusfunktion und darauf aufbauend weitere Funktionen wie etwa die Potenzfunktionen einzuführen.

1.5.1 Der Logarithmus

Im Beweis der Surjektivität der Exponentialfunktion haben wir gesehen, dass die für alle $z \neq 0$ definierte Zuordnung $z \mapsto \ln|z| + i \arg z$ ein Kandidat für die Umkehrung der Exponentialfunktion ist. Da die in dieser Zuordnung auftretende Argumentfunktion aber auf der negativen reellen Halbachse nicht stetig ist, die zu definierende Logarithmusfunktion aber (mindestens) stetig sein soll, fassen wir jetzt die so genannte **geschlitzte Zahlenebene**

$$\mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \leq 0 \,, \mathrm{Im}\, z = 0\} \tag{1.20}$$

ins Auge und definieren dort die Funktion

$$\ln z := \ln|z| + i \arg z \,, \quad \ln : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C} \,, \tag{1.21}$$

die wir **Hauptzweig** oder **Hauptwert des Logarithmus** nennen. Ferner betrachten wir für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Funktion

$$\ln_k z := \ln|z| + i \arg_k z \,, \quad \ln_k : \mathbb{C}^- \to \mathbb{C} \tag{1.22}$$

und nennen sie einen **Zweig** des Logarithmus, für $k \neq 0$ **Nebenzweig**. Offensichtlich gilt $\ln_0 = \ln$.

Da $\arg z = 0$ für reelle positive z ist, setzt die in (1.21) definierte Funktion den aus der reellen Analysis bekannten natürlichen Logarithmus auf $\mathbb{C}^-$ fort[3]

Vor der Formulierung des nächsten Satzes erinnern wir an die Notation $S_k^\circ = \{w \in \mathbb{C} : (2k-1)\pi < \mathrm{Im}\, w < (2k+1)\pi\}$ für die im Satz 1.4.8 beschriebenen Injektivitätsbereiche der Exponentialfunktion exp.

1.5.1 Satz (ln als „Umkehrfunktion“ von exp) : *Für jedes $k \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\ln_k(\exp z) = z \quad \textit{für alle } z \in S_k^\circ \ \textit{ und}$$
$$\exp(\ln_k w) = w \quad \textit{für alle } w \in \mathbb{C}^-.$$

[3] Trotz dieser Eigenschaft wird der komplexe Logarithmus in der Literatur meist mit log bezeichnet.

Beweis: Für alle $z = x + iy \in S_k$ gilt

$$\begin{aligned} \ln_k(\exp z) &= \ln|e^x(\cos y + i \sin y)| + i \arg_k(e^x(\cos y + i \sin y)) \\ &= \ln(e^x) + i \arg_k(\cos y + i \sin y) \;=\; x + iy \;=\; z\,. \end{aligned}$$

Die Identität $\exp(\ln_k w) = w$ wurde bereits im Beweis des Satzes 1.4.8 mitbewiesen. ■

Mit Hilfe des Satzes 1.5.1 lassen sich nun aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion Eigenschaften der Logarithmuszweige herleiten. So gilt z. B.

$$\ln_k 1 \;=\; 2k\pi i \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}\,. \tag{1.23}$$

Bezüglich des Additionstheorems – und der Konsequenzen hieraus – ist allerdings Vorsicht geboten, denn es gilt z.B.

$$\begin{aligned} &\ln(i-1)^2 \;=\; \ln(-2i) \;=\; \ln 2 + i\arg(-2i) \;=\; \ln 2 - \pi i\,, \quad \text{aber} \\ &2\ln(i-1) \;=\; 2\big(\ln\sqrt{2} + i\arg(i-1)\big) \;=\; 2\big(\ln\sqrt{2} + \tfrac{3\pi i}{2}\big) \;=\; \ln 2 + 3\pi i\,. \end{aligned}$$

Es gilt aber immerhin noch für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Modulo-Identität

$$\boxed{\ln_k z\cdot w \;=\; \ln_k z + \ln_k w \mod 2\pi i}\,, \quad \text{falls } z, w, zw \in \mathbb{C}^-\,, \tag{1.24}$$

denn es gilt zunächst

$$\ln_k z\cdot w = \ln(|z||w|) + i\arg_k z\cdot w = \ln|z| + \ln|w| + i\arg_k(z\cdot w)\,,$$

aber die Identität $\arg_k(z\cdot w) = \arg_k z + \arg_k w$ gilt – wegen (1.14) – nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π.

1.5.2 Potenzfunktionen

Wie in der reellen Analysis lassen sich mit Hilfe der Exponentialfunktion und der Logarithmusfunktion die Potenzfunktionen definieren. Natürlich haben wir es jetzt bei Potenzausdrücken, bei denen die Basis und der Exponent komplex sein dürfen, nicht mehr mit einen einzigen Ausdruck zu tun, sondern mit mehreren Zweigen.

Den Ausdruck

$$\boxed{a^b \;:=\; \exp(b\ln a)} \quad \text{für } a \in \mathbb{C}^-,\ b \in \mathbb{C} \tag{1.25}$$

nennt man **Hauptwert** oder **Hauptzweig der Potenz** a^b. Als **Zweige** oder **Werte** von a^b bezeichnet man die Ausdrücke $\exp(b\ln_k a)$, $k \in \mathbb{Z}$, ohne diesen eigene Symbole zuzuordnen. Im Fall $k \neq 0$ spricht man wieder von **Nebenwerten** oder **-zweigen**.

Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt ist, meinen wir fortan bei Potenzen stets den Hauptwert.

1.5.2 Satz (Anzahl der Werte von a^b): *Für jedes $a \in \mathbb{C}^-$ und $b \in \mathbb{C}$ hat die Menge $\{\exp(b \ln_k a) \in \mathbb{C} : k \in \mathbb{Z}\}$ der Werte von a^b*

(a) *genau $n \in \mathbb{N}$ Elemente, falls $b \in \mathbb{Q}$ mit gekürzter Darstellung $b = \frac{m}{n}$,*

(b) *abzählbar unendlich viele Elemente, falls $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$.*

Beweis: Übungsaufgabe ■

1.5.3 Beispiele: Die Potenz $(1+i)^\pi$ hat die Werte

$$\exp\big(\pi \ln_k(1+i)\big) \;=\; \exp\big(\pi(\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i)\big) \;=\; (\sqrt{2})^\pi \exp\Big(\pi i \big(\frac{8k+1}{4}\big)\Big) .$$

Keiner dieser Werte ist reell, denn $\frac{8k+1}{4}$ ist für kein $k \in \mathbb{Z}$ ganzzahlig.

Bemerkenswerterweise gibt es aber durchaus nichttriviale komplexe Potenzen mit reellem Hauptwert, so z.B. i^i. Es gilt nämlich

$$i^i \;=\; \exp(i \ln i) \;=\; \exp(i \cdot i \arg i) \;=\; \exp\big(-\frac{\pi}{2}\big) \;=\; e^{-\frac{\pi}{2}} \in \mathbb{R},$$

was schon Loenhard Euler 1746 mit Erstaunen festgestellt hat. ◊

Nachdem nun Potenzen mit komplexen Exponenten eingeführt sind, stellt sich die Frage, inwieweit die mit der Euler'schen Zahl e gebildete Funktion e^z für komplexes z mit der Exponentialfunktion $\exp z$ übereinstimmt. Erfreulicherweise gilt wegen $e^z = \exp(z \ln e) = \exp z$ die Beziehung

$$\boxed{e^z \;=\; \exp z} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \tag{1.26}$$

Damit ist nun endlich auch die zuvor als Abkürzung verwendete Beziehung

$$\boxed{e^{ix} \;=\; \cos x + i \sin x} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \tag{1.27}$$

präzise eingeführt.

Schließlich heben wir noch die jetzt legitimierte, aus Satz 1.4.7 (e) ersichtliche, Formel

$$\boxed{e^{\pi i} + 1 = 0}$$

hervor, die die fünf wichtigsten Zahlen der ANALYSIS in einen Zusammenhang bringt, und die bei einer von der Zeitschrift *The Mathematical Intelligencer* im Jahre 1988 weltweit durchgeführten Befragung zum schönsten mathematischen Satz aller Zeiten gewählt wurde.

Da jetzt die komplexe Potenz a^b erklärt ist, stehen uns für jedes $a \in \mathbb{C}^-$ die

(allgemeine) Exponentialfunktion $\quad a^z = \exp(z \ln a) \quad$ für alle $z \in \mathbb{C}$,

und für jedes $b \in \mathbb{C}$ die

Potenzfunktion $\quad z^b = \exp(b \ln z) \quad$ für alle $z \in \mathbb{C}^-$

zur Verfügung. Dabei handelt es sich jeweils um den **Hauptzweig** dieser Funktionen; die **Nebenzweige** erhält man, indem man ln durch $\ln_k$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ersetzt. Von besonderem Interesse sind die Potenzfunktionen mit $b = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, die so genannten

Wurzelfunktionen $\quad \sqrt[n]{z} := z^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln z\right) \quad$ für alle $z \in \mathbb{C}^-$

die nach Satz 1.5.2 genau n Zweige hat, die wegen

$$\exp\left(\frac{1}{n} \ln_k z\right) = \exp\left(\frac{1}{n}(\ln|z| + i \arg_k z)\right) = \sqrt[n]{|z|}\, \exp\left(\frac{i}{n} \arg_k z\right)$$

natürlich mit den im Satz 1.1.4 beschriebenen n-ten Wurzeln übereinstimmen.

1.5.3 Riemann'sche Flächen

Dieser Abschnitt enthält im Wesentlichen nur die bildhaften Darstellungen der Riemann'schen Flächen der Argumentfunktion, des Logarithmus und der Wurzelfunktionen.

Aufgaben

1. Präzisieren Sie die vom Reellen her bekannten Potenzrechenregeln

$$a^b a^c = a^{b+c}, \quad a^c b^c = (ab)^c, \quad (a^b)^c = a^{bc}$$

für komplexe a, b, c.

2 Komplexe Differenzialrechnung

In diesem Kapitel werden zunächst die Begriffe der *Ableitung* und der *Holomorphie* einer komplexen Funktion eingeführt. Dann beginnen wir mit der Analyse der im Zentrum der FUNKTIONENTHEORIE stehenden holomorphen Funktionen.

2.1 Der Begriff der Holomorphie

Wir führen zunächst den Begriff der *Ableitung* einer komplexen Funktion ein, der exakt wie in der eindimensionalen reellen ANALYSIS – inklusive der dortigen Doppelbedeutung – erklärt ist.

2.1.1 Definition: *Eine Funktion $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt in einem inneren Punkt z_0 von A* **(komplex) differenzierbar**, *wenn der Grenzwert*

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{2.1}$$

existiert. Die komplexe Zahl $f'(z_0)$ bezeichnet man als ***Ableitung*** *von f* ***im Punkt*** *z_0. Existiert dieser Grenzwert für jedes $z_0 \in A$, so nennt man die Funktion $f' : A \to \mathbb{C}$* ***Ableitung*** *von f.*

Wie im Reellen impliziert die Differenzierbarkeit von f im Punkt z_0 die Stetigkeit in z_0, denn der Grenzwert (2.1) kann wegen des gegen 0 strebenden Nenners nur dann existieren, wenn auch der Zähler gegen 0 konvergiert.

2.1.2 Beispiele: Die Funktion $f(z) := z^2$ ist in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ differenzierbar, denn es gilt

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} z + z_0 = 2z_0 .$$

Dagegen ist die Funktion $g(z) := |z|^2$ nur im Nullpunkt differenzierbar, obwohl die reelle Funktion $x \mapsto |x|^2$ auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Für alle $h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

gilt nämlich

$$\frac{|z_0+h|^2-|z_0|^2}{h} = \frac{(z_0+h)(\overline{z_0}+\overline{h})-z_0\overline{z_0}}{h} = \overline{z_0}+z_0\frac{\overline{h}}{h}+\overline{h}\,,$$

und das bedeutet, dass der Grenzwert $\lim_{h\to 0}\frac{|z_0+h|^2-|z_0|^2}{h}$ nur für $z_0=0$ existiert. Der Ausdruck $\frac{\overline{h}}{h}$ besitzt nämlich für $h\to 0$ keinen Grenzwert, was man z. B. daran erkennt, dass der Grenzwert $\lim_{h\to 0}\frac{\overline{h}}{h}$ für reelle bzw. rein imaginäre h unterschiedlich ist, nämlich gleich 1 bzw. -1. ♢

Um mit der Ableitung einer komplexen Funktion arbeiten zu können, ist die Definition in Form des Grenzwerts (2.1) wenig geeignet. Wir geben daher alternative Charakterisierungen der Differenzierbarkeit, die insbesondere im Zusammenhang mit theoretischen Untersuchungen von Vorteil sind.

2.1.3 Satz (Charakterisierung komplex differenzierbarer Funktionen): *Gegeben sei eine Funktion $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und ein innerer Punkt z_0 von A. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist im Punkt z_0 komplex differenzierbar.*

(b) *Es gilt $f(z) = f(z_0)+a(z-z_0)+r(z)$ für alle $z\in A$ mit einem $a\in\mathbb{C}$ und einer Funktion $r : A\to\mathbb{C}$ mit $\lim_{z\to z_0}\frac{r(z)}{z-z_0}=0$.*

(c) *Es gilt $f(z) = f(z_0)+b(z-z_0)+q(z)(z-z_0)$ für alle $z\in A$ mit einem $b\in\mathbb{C}$ und einer bei z_0 stetigen Funktion $q : A\to\mathbb{C}$ mit $q(z_0)=0$.*

Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, so gilt $a=b=f'(z_0)$.

Beweis: Analog zur reellen Analysis. ■

Die Betrachtung einer komplexen Funktion als reelle Abbildung des $\mathbb{R}^2$ bietet eine zweite Möglichkeit, Differenzierbarkeit zu definieren.

2.1.4 Definition: *Eine Funktion $f : A\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ heißt in einem inneren Punkt x_0+iy_0 von A* ***reell differenzierbar****, wenn die reelle Darstellung $(u,v) : A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ von f im Punkt (x_0,y_0) differenzierbar ist.*

Wir erinnern daran, dass die Differenzierbarkeit der Funktion $(u,v) : A\to\mathbb{R}^2$ im Punkt (x_0,y_0) damit gleichwertig ist, dass es eine reelle 2×2-Matrix M und eine Funktion $R=(R_1,R_2) : A\to\mathbb{R}^2$ mit $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{R(x,y)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}=0$ gibt, so dass für alle $(x, y) \in A$ die Identität

$$\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1(x,y) \\ R_2(x,y) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

gilt. Ist dies der Fall, so ist M die Ableitung – d.h. die Jacobi-Matrix – der Funktion (u, v) an der Stelle (x_0, y_0).

Die fundamental wichtige Beziehung zwischen der komplexen und der reellen Differenzierbarkeit einer komplexen Funktion beschreibt der folgende Satz.

2.1.5 Satz (Beziehung zwischen komplexer und reeller Differenzierbarkeit): *Gegeben seien eine Funktion $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die zugehörige reelle Darstellung $(u, v) : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und ein innerer Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ von A. Dann gilt:*

f ist im Punkt z_0 genau dann komplex differenzierbar, wenn f in z_0 reell differenzierbar ist und die Beziehungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \,, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \tag{2.3}$$

gelten. Ist dies der Fall, d.h., ist f bei z_0 komplex differenzierbar, so besitzt die Ableitung $f'(z_0)$ die Darstellungen

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \,. \tag{2.4}$$

Beweis: Der Beweis besteht lediglich aus der wechselseitigen Umformung der beiden Charakterisierungen Satz 2.1.3 (b) und (2.2).

(i) f sei im Punkt z_0 komplex differenzierbar. Aus der nach Satz 2.1.3 (b) vorliegenden, für alle $z \in A$ gültigen, Identität

$$f(z) = f(z_0) + a(z - z_0) + r(z) \tag{2.5}$$

folgt dann, wenn wir a und $r(z)$ gemäß $a = a_1 + i\,a_2$ und $r(x+iy) = r_1(x, y) + i\,r_2(x, y)$ in Real- und Imaginärteil aufspalten, und die Identität $a(z - z_0) = (a_1 + i\,a_2)(x - x_0 + i(y - y_0)) = a_1(x - x_0) - a_2(y - y_0) + i\,[a_2(x - x_0) + a_1(y - y_0)]$ beachten, die für alle $(x, y) \in A$ gültige Identität

$$\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1(x,y) \\ r_2(x,y) \end{pmatrix} \,. \tag{2.6}$$

Da wegen $\lim_{z \to z_0} \frac{r(z)}{z - z_0} = 0$ das Restglied $\binom{r_1(x,y)}{r_2(x,y)}$ auch noch nach Division durch $\|(x, y) - (x_0, y_0)\|$ für $(x, y) \to (x_0, y_0)$ gegen 0 konvergiert, ist damit gezeigt, dass (u, v) im Punkt (x_0, y_0) differenzierbar ist und dort die Jacobi-Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{smallmatrix}\right)$ besitzt. Dies impliziert dann auch die Beziehungen (2.3).

(ii) Jetzt sei f in z_0 reell differenzierbar, und es gelten die Beziehungen (2.3). Die Identität (2.2) hat dann die Form (2.6) mit $a_1 = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$ und $a_2 = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$. Durch (die offensichtlich zulässige) Umkehrung der Schlussweise von (2.5) auf (2.6) erhalten wir dann die Identität (2.5) mit der Restgliedaussage $\lim_{z \to z_0} \frac{r(z)}{z - z_0} = 0$. Damit ist gezeigt, dass f im Punkt z_0 komplex differenzierbar ist und die Ableitung $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\, \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$ besitzt, die sich wegen (2.3) auch in der Form $f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\, \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$ darstellen lässt.

(iii) Dass beim Erfülltsein einer der beiden äquivalenten Bedingungen die Beziehungen (2.4) gelten, wurde im vorherigen Beweisschritt mitbewiesen. ∎

Funktionen, die nur in einzelnen Punkten differenzierbar sind – wie etwa $g(z) = |z|^2$ im Nullpunkt –, spielen in der Theorie komplexer Funktionen keine Rolle. Dieser Tatsache trägt die folgende Definition Rechnung, in der der für die Funktionentheorie geeignete Differenzierbarkeitsbegriff eingeführt wird.

2.1.6 Definition: *Eine Funktion $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **in einem Punkt** z_0 von A **holomorph**, wenn sie in jedem Punkt einer offenen, ganz in A gelegenen, Umgebung von z_0 komplex differenzierbar ist. Die Funktion heißt **holomorph** in einer Teilmenge von A, wenn sie in jedem Punkt dieser Menge holomorph ist.*

Holomorphie ist gemäß dieser Definition nur für innere Punkte einer Menge bzw. nur auf offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ erklärt. Oder anders: die Menge aller Punkte, in denen eine Funktion holomorph ist, ist stets offen in $\mathbb{C}$.

Auf der anderen Seite bedeutet dies, dass komplexe Differenzierbarkeit auf *offenen* Mengen das Gleiche ist wie Holomorphie. Diese Tatsache impliziert das folgende Analogon des Satzes 2.1.5 für holomorphe Funktionen.

2.1.7 Satz (Cauchy-Riemann'sche Differenzialgleichungen): *Eine auf einer offenen Menge $A \subseteq \mathbb{C}$ erklärte Funktion $f : A \to \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn sie reell differenzierbar ist und die so genannten **Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen***

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)\,, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \tag{2.7}$$

für alle $(x, y) \in A$ erfüllt sind.

Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen sind ein System partieller Differenzialgleichungen, deren Lösungen eine Reihe von Eigenschaften besitzen, denen die reellen Darstellungen holomorpher Funktionen genügen müssen. Dies erlaubt, bestimmte Ergebnisse der reellen ANALYSIS einzusetzen, um Erkenntnisse über komplexe Funktionen zu gewinnen. So lässt sich z. B. aus der bekannten Tatsache, dass eine auf einer zusammenhängenden Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ differenzierbare Funktion $w : D \to \mathbb{R}$ mit verschwindendem Gradienten konstant ist, auf Folgendes schließen:

2.1.8 Folgerung: *Eine holomorphe Funktion $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit identisch verschwindender Ableitung ist auf jeder zusammenhängenden Teilmenge von A konstant.*

Begründung: Wegen $f'(z) \equiv u_x(x,y) + iv_x(x,y) \equiv v_y(x,y) - iv_x(x,y) \equiv 0$ verschwinden die Gradienten von u und v identisch auf A. Folglich sind u und v auf jeder Zusammenhangskomponente von A konstant. ■

Während das vorherige Ergebnis den von der reellen ANALYSIS geprägten Erwartungen entspricht, trifft dies auf die nächste Folgerung nicht mehr zu.

2.1.9 Folgerung: *Eine holomorphe Funktion $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit konstantem Betrag ist auf jeder zusammenhängenden Teilmenge von A konstant.*

Begründung: Teil einer Übungsaufgabe

Bevor wir diesen Abschnitt beschließen, heben wir nochmals die für die FUNKTIONENTHEORIE fundamentale Bedeutung der Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen hervor. Während bei einer *stetigen* komplexen Funktion keinerlei Beziehung zwischen Real- und Imaginärteil besteht, liegt bei einer *holomorphen* Funktion eine starke Kopplung vor, die in den Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen ihren Ausdruck findet.

Dies geht sogar so weit, dass eine holomorphe Funktion allein durch ihren Realteil oder ihren Imaginärteil bis auf eine additive Konstante eindeutig festgelegt ist. Genauer, ist $u(x,y)$ bekannt, so ist wegen $\operatorname{grad} v(x,y) = (-u_y(x,y), u_x(x,y)$ die Funktion $v(x,y)$ eine Stammfunktion von $(-u_y(x,y), u_x(x,y))$, und da – wie wir später sehen werden – die partiellen Ableitungen von $u(x,y)$ stetig sind, kann man $v(x,y)$ wie in der ANALYSIS beschrieben berechnen. Gleiches gilt für die Berechnung des Realteils $u(x,y)$ bei gegebenem Imaginärteil $v(x,y)$.

Diese Ausführungen besagen insbesondere, dass eine holomorphe Funktion, die nur reelle oder nur rein imaginäre Werte annimmt, konstant ist. In diesen Fällen ist nämlich der Imaginär- bzw. Realteil identisch 0, und folglich der Real- bzw. Imaginärteil konstant. Damit haben wir auf einen Schlag erkannt, dass keine der zuvor betrachteten Funktionen

$$z \mapsto \operatorname{Re} z\,, \quad z \mapsto \operatorname{Im} z\,, \quad z \mapsto \arg z\,, \quad z \mapsto |z|\,, \quad z \mapsto |z|^2$$

auch nur an einer einzigen Stelle von $\mathbb{C}$ holomorph ist.

2.1.10 Beispiele: Veranschaulichung der Funktionen $z \mapsto |z|^2$ und $z \mapsto z^2$ jeweils anhand der Graphen von Real- und Imaginärteil.

Im ersten Fall sind der Realteil $u(x,y) = x^2 + y^2$ und der Imaginärteil $v(x,y) = 0$ überall differenzierbar (sogar analytisch), die komplexe Funktion $f(z) = |z|^2$ ist aber nur bei 0 komplex differenzierbar und nirgends holomorph. Die Glattheit der Graphen von Real- und Imaginärteil allein besagen also nichts über die Holomorphie der komplexen Funktion. Vielmehr muss der von den Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen beschriebene Zusammenhang bestehen, der geometrisch als Beziehung zwischen den Tangentialebenen an die Graphen von $u(x,y)$ und $v(x,y)$ zum Ausdruck kommt. ◊

Die Einschränkungen, die die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen den reellen Darstellungen $(u,v) : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ holomorpher Funktion auferlegen, führen in der Klasse der C^2-Funktionen[1] zu den Bedingungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

für alle $(x,y) \in A$. Um dies zu begründen, muss man lediglich die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen partiell nach x und y differenzieren und den Satz von Schwarz über die Vertauschung der Differenziationsreihenfolge anwenden. Die Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ genügen also der so genannten **Laplace-Gleichung** oder **Potenzialgleichung**.

$$\Delta\, w(x,y) := \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

für eine zu bestimmende Funktion $w(x,y)$. Der hierbei auftretende Differenzialoperator $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ heißt **Laplace-Operators**, und alle Lösungen der Laplace-Gleichung nennt man **harmonisch**.

[1] Wie sich zeigen wird, bedeutet die C^2-Eigenschaft keine zusätzliche Voraussetzung, denn Real- und Imaginärteile holomorpher Funktion werden sich sogar als reell-analytisch erweisen.

Abschließend erwähnen wir noch zwei Begriffsbildungen, die mit der Holomorphie aufs Engste verknüpft sind und uns daher später wieder begegnen werden. Eine holomorphe Funktion $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **biholomorph**, wenn sie injektiv ist, und ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : f(A) \to A$ holomorph ist. Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, heißt **ganze** Funktion.

Aufgaben

1. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(z) := \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4} & \text{für } z \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } z = 0\,, \end{cases} \qquad f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

bei 0 die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen erfüllt, dort aber dennoch nicht komplex differenzierbar ist. Wie verträgt sich dies mit dem Satz 2.1.5 der Vorlesung?

2. Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass jede der folgenden, auf G vorausgesetzten, Beziehungen impliziert, dass f konstant ist.

(a) $\operatorname{Re} f(z) = \text{konstant}\,,$

(b) $|f(z)| = \text{konstant}\,,$

(c) $f(z) \neq 0$ und $\arg f(z) = \text{konstant}\,,$

(d) $\overline{f(z)}$ ist holomoph.

3. Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass die Funktion $x^2 + 2axy + by^2$ der Realteil einer ganzen Funktion ist. Wie sehen die zugehörigen Imaginärteile aus?

4. Zeigen Sie, dass die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen in Polarkoordinaten die Form

$$\frac{\partial U}{\partial r}(r,\varphi) = \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \varphi}(r,\varphi) \;\;, \quad \frac{\partial V}{\partial r}(r,\varphi) = -\,\frac{1}{\varphi}\,\frac{\partial U}{\partial \varphi}(r,\varphi)$$

haben. Wie lautet die zugehörige Laplace-Gleichung?

2.2 Eigenschaften holomorpher Funktionen

Dass man mit holomorphen Funktionen – wie im Reellen mit differenzierbaren Funktionen – rechnen und sie zu Funktionenmengen mit interessanten strukturellen Eigenschaften zusammenfassen kann, besagen die folgenden Sätze.

2.2.1 Satz (Rechenregeln): *Gegeben seien zwei holomorphe Funktionen $f, g : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dann gilt:*

(a) *Für beliebige $a, b \in \mathbb{C}$ ist $af + bg : A \to \mathbb{C}$ holomorph, und es gilt*

$$(af + bg)'(z) \;=\; a f'(z) + b g'(z) \quad \text{für alle } z \in A\,,$$

(b) *Die Funktion $fg : A \to \mathbb{C}$ ist holomorph, und es gilt*

$$(fg)'(z) \;=\; f'(z)\, g(z) + f(z)\, g'(z) \quad \text{für alle } z \in A\,,$$

(c) *Ist $g(z) \neq 0$ auf A, so ist $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{C}$ holomorph, und es gilt*

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(z) \;=\; \frac{f'(z)\, g(z) - f(z) g'(z)}{g(z)^2} \quad .$$

Beweis: Wegen Satz 2.1.3 verläuft der Beweis wie im Reellen. ■

2.2.2 Beispiele: Alle rationalen Funktionen, insbesondere alle Polynome, sind holomorph, und die Ableitungen ergeben sich nach den gleichen Regeln wie in der reellen Analysis. Insbesondere ist die Ableitung jeder konstanten Funktion identisch 0, und es gilt die Beziehung

$$\frac{d}{dz}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k\Big) \;=\; \sum_{k=1}^{n} k\, a_k\, z^{k-1}$$

für die Ableitung eines Polynoms mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. ◊

2.2.3 Satz (Kettenregel): *Gegeben seien zwei holomorphe Funktionen $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g : B \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(A) \subseteq B$. Dann ist auch die Funktion $g \circ f : A \to \mathbb{C}$ holomorph, und es gilt*

$$(g \circ f)'(z) \;=\; g'\big(f(z)\big)\, f'(z) \quad \text{für alle } z \in A\,.$$

Beweis: Wegen Satz 2.1.3 verläuft der Beweis wie im Reellen. ■

Im Anschluss an die Regeln für das Rechnen mit holomorphen Funktionen mag man – mit Blick auf die reelle ANALYSIS – erwarten, zu folgenden Themen etwas zu erfahren: Mittelwertsatz, Regel von de l'Hospital, Umkehrsatz, Satz über implizite Funktionen, höhere Ableitungen, Extremwertbestimmung, Stammfunktionen.

- Zu Mittelwertsatz und Regel von de l'Hospital siehe Übungsaufgabe.
- Der Umkehrsatz lässt sich leicht mit Hilfe des Satzes über die Cauchy-Riemann'sche Differenzialgleichungen von der reellen ANALYSIS übernehmen, allerdings unter der Voraussetzung, dass die reelle Darstellung der betrachteten komplexen Funktion nicht nur differenzierbar, sondern *stetig* differenzierbar ist. Da sich diese – im Moment zusätzliche – Voraussetzung später als automatisch erfüllt herausstellen wird, verschieben wir den Umkehrsatz auf einen späteren Zeitpunkt.
- Die Problematik des Satzes über implizite Funktionen stellt sich in der (eindimensionalen) FUNKTIONENTHEORIE nicht, da mindestens zwei unabhängige Veränderliche benötigt werden.
- Höhere Ableitungen holomorpher Funktionen bilden ein besonders interessantes und für die FUNKTIONENTHEORIE spezifisches Thema, denn es wird sich herausstellen, dass die Ableitung jeder holomorphen Funktion wieder holomorph ist, damit natürlich auch die Ableitung der Ableitung usw. Da die Herleitung dieses zentralen Ergebnisses aber mehr verlangt, als uns im Moment zur Verfügung steht, wird diese Thematik systematisch erst später behandelt.
- Extremwertprobleme sind kein Thema der FUNKTIONENTHEORIE, da der Bildbereich $\mathbb{C}$ – im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ – keine Ordnungsstruktur und daher kein „größer“ oder „kleiner“ besitzt.
- Stammfunktionen lassen sich zwar auch für holomorphe Funktionen leicht definieren, aber ihre systematische Behandlung erfordert einige Kenntnisse über die Integration komplexer Funktionen und wird daher erst später behandelt.

Aufgaben

1. Klären Sie mittels Beweis oder Gegenbeispiel, ob die folgenden Aussagen wahr sind:
   (a) Mittelwertsatz: Ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, so gibt es zu je zwei Punkten $a, b \in \mathbb{C}$ einen Punkt ζ auf der Verbindungsstrecke von a nach b mit $f(a) - f(b) = f'(\zeta)\,(a-b)$.
   (b) de l'Hospital: Sind $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und gilt $f(0) = g(0) = 0$ und $g'(0) \neq 0$, so folgt
$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} .$$

2.3 Potenzreihen

Potenzreihen spielen in der FUNKTIONENTHEORIE eine noch größere Rolle als in der reellen ANALYSIS. Ihnen wollen wir uns jetzt widmen und gleich das fundamentale Ergebnis beweisen, das – grob gesprochen – besagt, dass man Potenzreihen gliedweise differenzieren kann und so die Ableitung der Grenzfunktion einer Potenzreihe erhält.

2.3.1 Satz (Holomorphie von Potenzreihen): *Ist $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius ρ, so besitzt auch die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} k\,c_k(z-z_0)^{k-1}$ den Konvergenzradius ρ, und es gilt*

$$f(z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(z-z_0)^k \quad\Longrightarrow\quad f'(z) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} k\,c_k\,(z-z_0)^{k-1}\,.$$

Das soll heißen, dass die Grenzfunktion $f : U_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$ der Ausgangsreihe holomorph ist, und dass ihre Ableitung $f' : U_\rho(z_0) \to \mathbb{C}$ die Grenzfunktion der gliedweise differenzierten Reihe ist.

Beweis: Die Aussage über den Konvergenzradius der gliedweise differenzierten Reihe ergibt sich sofort aus der – wegen $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$ – gültigen Beziehung

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|k\,c_k|} \;=\; \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}\,\sqrt[k]{|c_k|} \;=\; \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}\,.$$

Um die restlichen Aussagen des Satzes zu beweisen, wählen wir einen beliebigen Punkt $a \in U_\rho(z_0)$ und zeigen, dass $f(z)$ bei a komplex differenzierbar ist und die Ableitung $f'(a) = \sum_{k=1}^{\infty} k\,c_k\,(a-z_0)^{k-1}$ besitzt. Zu diesem Zwecke schließen wir – unter Verwendung der aus der ANALYSIS bekannten Identität $\alpha^k - \beta^k = (\alpha-\beta)\sum_{\kappa=0}^{k-1} \alpha^\kappa \beta^{k-\kappa-1}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ – auf die für alle $z \in A$ gültige Beziehung

$$f(z) - f(a) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,[(z-z_0)^k - (a-z_0)^k)] \;=\; (z-a)\sum_{k=1}^{\infty} c_k\,r_k(z)$$

mit $r_k(z) := \sum_{\kappa=0}^{k-1}(z-z_0)^\kappa\,(a-z_0)^{k-\kappa-1}$. Setzen wir dann $r(z) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,r_k(z)$, so folgt

$$f(z) \;=\; f(a) + (z-a)\,r(z) \quad \text{für alle } z \in A\,,$$

und so bleibt nach Satz 2.1.3 (c) – und wegen $r(a) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,k\,(a-z_0)^{k-1}$ – nur noch zu zeigen, dass $r(z)$ bei a stetig ist. Dass dies der Fall ist, sieht man – mit Hilfe des Weierstraß-Kriteriums (ANALYSIS I, Satz 2.8.2) – wie folgt: für alle z aus einer Kreisscheibe $U_\sigma(z_0)$ mit $|a| < \sigma < \rho$ gilt

$$\big|c_k r_k(z)\big| \;\leq\; |c_k| \sum_{k=0}^{k-1} |z - z_0|^\kappa \, |a - z_0|^{k-\kappa-1} \;\leq\; |c_k| \, k \, |\sigma - z_0|^{k-1} \, .$$

Da – wie eingangs gezeigt – die Potenzreihe $\sum_{k=1}^\infty k\, c_k \, (z - z_0)^k$ den Konvergenzradius ρ besitzt, und da dies dann natürlich auch für $\sum_{k=1}^\infty k\,|c_k|\,(z - z_0)^k$ gilt, ist die Zahlenreihe $\sum_{k=1}^\infty k\,|c_k|\,|\sigma - z_0|^{k-1}$ wegen $0 < \sigma < \rho$ konvergent. Nach dem Weierstraß-Kriterium ist dann die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^\infty c_k \, r_k(z)$ auf $U_\sigma(z_0)$ gleichmäßig konvergent, und daher ist ihre Grenzfunktion $r(z)$ in $U_\sigma(z_0)$ – und daher insbesondere im Punkt a – stetig. ■

2.3.2 Beispiele: Für die als Grenzfunktionen von Potenzreihen auf ganz $\mathbb{C}$ definierten Funktionen $\exp z$, $\sin z$ und $\cos z$ gelten die vom Reellen bekannten Beziehungen auch für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\boxed{\frac{d}{dz} \exp z \;=\; \exp z} \; , \quad \boxed{\frac{d}{dz} \sin z \;=\; \cos z} \; , \quad \boxed{\frac{d}{dz} \cos z \;=\; -\, \sin z} \; .$$

Die exemplarisch für den Sinus angegebene Begründung mit Hilfe von Satz 2.3.1 lautet $\frac{d}{dz} \sin z = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{(2k+1)\, z^{2k}}{(2k+1)!} \;=\; \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \;=\; \cos z$. Beim Logarithmus gilt die für alle Zweige einheitliche Beziehung

$$\boxed{\frac{d}{dz} \ln_k z \;=\; \frac{1}{z}} \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^- \text{ und } k \in \mathbb{Z} \; .$$

Zur Begründung bemühen wir den Satz 1.5.1 und die einschlägigen Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten. Damit gilt, wenn wir $z = \exp w$ und $z_0 = \exp w_0$ setzen,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\ln_k z - \ln_k z_0}{z - z_0} \;=\; \lim_{w \to w_0} \frac{\ln_k(\exp w) - \ln_k(\exp w_0)}{\exp w - \exp w_0} \;=$$

$$=\; \lim_{w \to w_0} \frac{w - w_0}{\exp w - \exp w_0} \;=\; \frac{1}{\lim\limits_{w \to w_0} \frac{\exp w - \exp w_0}{w - w_0}} \;=\; \frac{1}{\exp w_0} \;=\; \frac{1}{z_0} \, .$$

Schließlich erhalten wir für den Hauptzweig der allgemeinen Exponentialfunktion für jedes $a \in \mathbb{C}^-$ die Beziehung

$$\boxed{\frac{d}{dz} a^z \;=\; a^z \ln a} \qquad \text{für alle } \; z \in \mathbb{C}$$

und für den Hauptzweig der Potenzfunktion für jedes $b \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\frac{d}{dz} z^b \;=\; b z^{b-1}} \qquad \text{für alle } \; z \in \mathbb{C}^- \, .$$

Die Nebenzweige von a^z und z^b haben die gleiche Ableitung wie der jeweilige Hauptzweig. ◊

Der Satz 2.3.1 impliziert, dass die Ableitung $f'(z)$ der Grenzfunktion einer Potenzreihe ebenfalls holomorph ist und somit die Ableitung von $f'(z)$ gebildet werden kann. Mehr noch, bei gleich bleibendem Definitionsbereich lassen sich Ableitungen beliebig hoher Ordnung bilden, die wir wie im Reellen mit $f''(z)$ und allgemein rekursiv mit $f^{(0)}(z) = f(z)$ und $f^n(z) := f'(f^{(n-1)})(z)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen. Bezüglich der expliziten Darstellung der höheren Ableitungen von Potenzreihen gilt der folgende Satz.

2.3.3 Korollar (zu Satz 2.3.1): *Ist $f(z)$ die Grenzfunktion einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ mit Konvergenzradius ρ, so besitzt $f(z)$ Ableitungen beliebig hoher Ordnung, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$f^{(n)}(z) \;=\; \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!}\, c_k\,(z-z_0)^{k-n} \quad \textit{für alle } z \in U_\rho(z_0)\,.$$

Ferner gilt

$$c_k \;=\; \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad \textit{für alle } k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Beweis: Der Induktionsanfang $n = 1$ ist mit dem Satz 2.3.1 erledigt, und der Induktionsschritt lautet

$$f^{(n+1)}(z) \;=\; \frac{d}{dz}\, f^{(n)}(z) \;=\; \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k!}{(k-n-1)!}\, c_k\,(z-z_0)^{k-n-1}\,.$$

Setzt man in der bewiesenen Formel $z = z_0$, so folgt $f^{(n)}(z_0) = n!\, c_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. ■

Aufgaben

1. Bestimmen Sie für jeden Punkt $z_0 \in \mathbb{C}^-$ und jedes $k \in \mathbb{Z}$ eine Potenzreihe mit Entwicklungsmittelpunkt z_0, deren Grenzfunktion auf der zugehörigen Konvergenzkreisscheibe mit dem Logarithmuszweig $\ln_k z$ übereinstimmt. Berechnen Sie ferner für jede dieser Potenzreihen den Konvergenzradius.

2.4 Winkel- und Orientierungstreue

Um geometrische Eigenschaften holomorpher Funktionen – mit Hilfe der zugehörigen reellen Darstellungen – untersuchen zu können, erinnern wir zunächst an einige Sachverhalte aus der Linearen Algebra. Aus der für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gültigen Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$|\langle x, y\rangle| \leq |x|\,|y| \tag{2.8}$$

folgt der so genannte **Cosinussatz**

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\,\langle x, y\rangle \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^2\,, \tag{2.9}$$

und

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{|x|\,|y|} \leq 1 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\,. \tag{2.10}$$

Daher gibt es ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in [0, \pi]$ mit

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{|x|\,|y|} \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\,, \tag{2.11}$$

den so genannten **Winkel** zwischen x und y. Für die in der Abbildung gezeigte Konstellation erscheint dann der Cosinussatz in der Form

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2\,|x|\,|y|\,\cos\psi\,. \tag{2.12}$$

Eine reelle 2×2-Matrix M – bzw. die von ihr induzierte lineare Abbildung des $\mathbb{R}^2$ – heißt **winkeltreu**, wenn

$$\frac{\langle Mx, My\rangle}{|Mx|\,|My|} = \frac{\langle x, y\rangle}{|x|\,|y|} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \tag{2.13}$$

gilt, und sie heißt **orientierungstreu**, wenn $\det M > 0$ gilt.

Zur bequemen Formulierung der folgenden Definition bezeichnen wir für eine komplexe Funktion $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und einen Punkt $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$ mit

$$J_f(z_0) := \begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

die Jacobi-Matrix der zugehörigen reellen Darstellung $(u, v) : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an der Stelle (x_0, y_0).

2.4.1 Definition: *Eine Funktion $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **in einem Punkt** $z_0 \in A$ **winkeltreu**, wenn die Jacobi-Matrix $J_f(z_0)$ winkeltreu ist, und sie heißt **im Punkt** z_0 **orientierungstreu**, wenn $\det J_f(z_0)$ positiv ist. Die Funktion heißt **winkeltreu** bzw. **orientierungstreu** in einer Teilmenge von A, wenn sie in jedem Punkt dieser Teilmenge winkel- bzw. orientierungstreu ist.*

2.4.2 Satz (Winkel- und Orientierungstreue holomorpher Funktionen): *Eine holomorphe Funktion $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist in jedem Punkt $z_0 \in A$, in dem $f'(z_0) \neq 0$ gilt, winkel- und orientierungstreu.*

Beweis: Die zur Diskussion stehende Jacobi-Matrix ist wegen der Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen eine Drehmatrix, und Drehmatrizen sind winkel- und orientierungstreu, wie man aus der LINEAREN ALGEBRA weiß bzw. durch Rechnung verifiziert. ■

Im Hinblick auf die geometrische Interpretation der Winkel- und Orientierungstreue übertragen wir einige Begriffe der reellen ANALYSIS ins Komplexe. Eine Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ nennen wir **glatt** oder **C^1-Kurve**, wenn ihr Real- und Imaginärteil stetig differenzierbar sind. Hat $\gamma(t)$ die Form $\xi(t) + i\eta(t)$, so bezeichnet man die **Ableitung** von $\gamma(t)$ mit[2]

$$\dot{\gamma}(t) := \dot{\xi}(t) + i\dot{\eta}(t) .$$

Ist in einem Kurvenpunkt $\gamma(p)$ die Ableitung $\dot{\gamma}(p) \neq 0$, so besitzt die Kurve in diesem Punkt eine **Tangente**, deren **Richtung** durch die komplexe Zahl $\dot{\gamma}(p)$ bzw. den Richtungsvektor $(\dot{\xi}(t), \dot{\eta}(t))$ gegeben ist (siehe Abbildung).

Ist nun $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, deren Definitionsbereich das Bild $\gamma([a, b])$ der Kurve γ enthält, so ist auch

$$f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$$

eine Kurve, die so genannte **Bildkurve** von γ bezüglich f. Wie γ ist auch $f \circ \gamma$ differenzierbar, und es gilt

$$\frac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big) = f'\big(\gamma(t)\big)\, \dot{\gamma}(t) . \tag{2.14}$$

Gilt für einen Kurvenpunkt $\gamma(p)$ sowohl $\dot{\gamma}(p) \neq 0$ als auch $f'(\gamma(p)) \neq 0$, so beschreibt die komplexe Zahl $f'(\gamma(p))\,\dot{\gamma}(p)$ die **Richtung** der **Tangente** an die Bildkurve im Punkt $f(\gamma(p))$ (siehe Abbildung).

Obwohl die Beziehung (2.14) wie eine einfache Anwendung der Kettenregel aussieht, ist sie beweisbedürftig, denn weder die aus der reellen ANALYSIS bekannte Kettenregel noch die im Satz 2.2.3 beschriebene komplexe Variante ist

[2] Da – wie wir schon gesehen haben – die Ableitung nach einer komplexen Veränderlichen wesentlich mehr impliziert als die Ableitung nach einer reellen, unterscheiden wir beide Typen von Ableitungen auch symbolisch. Im Gegensatz zu dem im Abschnitt 2.1 eingeführten Strich für die Ableitung nach einer komplexen Variablen bezeichnen wir die reelle Ableitung mit einem Punkt.

direkt anwendbar. Die reelle Kettenregel kommt aber ins Spiel, wenn man die reelle Darstellung von f – wie üblich – mit (u,v) bezeichnet und wie folgt verfährt. Aus der Identität

$$f\big(\gamma(t)\big) \;=\; u\big(\xi(t),\eta(t)\big) + i\,v\big(\xi(t),\eta(t)\big)$$

folgt einerseits mit Hilfe der reellen Kettenregel

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\,f\big(\gamma(t)\big) \;&=\; \Big[\,\frac{\partial u}{\partial x}\big(\xi(t),\eta(t)\big)\,\dot\xi(t) + \frac{\partial u}{\partial y}\big(\xi(t),\eta(t)\big)\,\dot\eta(t)\Big] + \\ &\qquad + i\,\Big[\,\frac{\partial v}{\partial x}\big(\xi(t),\eta(t)\big)\,\dot\xi(t) + \frac{\partial v}{\partial y}\big(\xi(t),\eta(t)\big)\,\dot\eta(t)\Big]\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}f'\big(\gamma(t)\big)\,\dot\gamma(t) \;&=\; \Big[\,\frac{\partial u}{\partial x}\big(\xi(t),\eta(t)\big) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\big(\xi(t),\eta(t)\big)\Big]\,\Big[\dot\xi(t) + i\,\dot\eta(t)\Big] \\ &=\; \Big[\,\frac{\partial u}{\partial x}\big(\xi(t),\eta(t)\big)\,\dot\xi(t) - \frac{\partial v}{\partial x}\big(\xi(t),\eta(t)\big)\,\dot\eta(t)\Big] \\ &\qquad + i\,\Big[\,\frac{\partial v}{\partial x}\big(\xi(t),\eta(t)\big)\,\dot\xi(t) + \frac{\partial u}{\partial x}\big(\xi(t),\eta(t)\big)\,\dot\eta(t)\Big]\end{aligned}$$

Schließlich zeigen die Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen, dass die beiden Ausdrücke gleich sind.

Um die Winkeltreue einer holomorphen Funktion in einem Punkt z_0 mit der Eigenschaft $f'(z_0) \neq 0$ zu demonstrieren, betrachten wir zwei C^1-Kurven $\gamma_1(t)$ und $\gamma_2(t)$, die sich zum gleichen „Zeitpunkt“ p im Punkt z_0 „treffen“, d.h., es gilt $\gamma_1(p) = \gamma_2(p) = z_0$ (siehe Abbildung). Da beim Übergang vom „Schnittbild“ der Kurven bei z_0 zum „Schnittbild“ der Bildkurven bei $f(z_0)$ die beiden Tangentenrichtungen $\dot\gamma_1(p)$ und $\dot\gamma_2(p)$ mit der gleichen komplexen Zahl $f'(z_0)$ multipliziert werden, bleibt der „Schnittwinkel“ zwischen den beiden Kurven ungeändert. Und wegen der Orientierungstreue einer holomorphen Funktion bleibt auch die Orientierung des Schnittwinkels erhalten, anders als z.B. bei der Funktion $z \mapsto \overline{z}$.

Das folgende Beispiel zeigt einerseits, dass die Winkeltreue einer holomorphen Funktion in Punkten mit verschwindender Ableitung im Allgemeinen nicht vorliegt, und dass andererseits holomorphe Funktionen so genannte „orthogonale Netze“ auf orthogonale Netze abbilden. Unter einem **orthogonalen Netz** versteht man dabei eine von zwei Kurvenscharen gebildete Menge von C^1-Kurven mit der Eigenschaft, dass jede Kurve der einen Schar jede Kurve der anderen Schar im rechten Winkel schneidet.

2.4.3 Beispiel: Betrachtet wird für die Funktion $z \mapsto z^2$ das Bild des aus horizontalen und vertikalen Geraden gebildeten orthogonalen Netzes, ebenso das

Urbild dieses Netzes. Im Nullpunkt, dem einzigen Punkt, in dem die Ableitung verschwindet, wird der Winkel bei Anwendung der Abbildung verdoppelt.

Wegen $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ gilt für die reelle Darstellung

$$u(x,y) = x^2 - y^2 , \quad v(x,y) = xy .$$

Für die horizontale Geradenschar $y = c_h$, $c_h \in \mathbb{R}$, des Definitionsbereichs erhält man im Bildbereich wegen $u(x,c_h) = x^2 - c_h^2$ und $v(x,c_h) = 2c_h x$ die Parabelschar

$$u = \frac{v^2}{4c_h^2} - c_h^2 , \quad c_h \in \mathbb{R} .$$

Entsprechend liefert die vertikale Geradenschar $x = c_v$, $c_v \in \mathbb{R}$, die Beziehungen $u(c_v,y) = c_v^2 - y^2$ und $v(c_v,y) = 2c_v y$ und damit die Parabelschar

$$u = c_v^2 - \frac{v^2}{4c_v^2} , \quad c_v \in \mathbb{R} .$$

Umgekehrt liefern die horizontalen Geraden der Schar $v = d_h$, $d_h \in \mathbb{R}$, des Bildbereichs als Urbilder die Hyperbeln den Schar

$$xy = d_h , \quad d_h \in \mathbb{R} ,$$

während die vertikalen Geraden $u = d_v$, $d_v \in \mathbb{R}$, die Hyperbeln

$$x^2 - y^2 = d_v , \quad d_v \in \mathbb{R}$$

als Urbilder besitzen. $\Diamond$

Aufgaben

1. Beschreiben Sie für die holomorphe Funktion

$$f(z) := \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) , \quad f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

das Bild des orthogonalen Netzes, das aus den konzentrischen Kreisen mit Mittelpunkt 0 und den von 0 ausgehenden Halbstrahlen besteht.

Verifizieren Sie ferner für jeden Punkt des Wertebereichs von f, dass sich die Bildkurven dort in einem rechten Winkel schneiden.

2. Beantworten Sie für die in der vorherigen Aufgabe betrachtete Funktion folgende Fragen, jeweils mit Begründung:

(a) Ist f injektiv oder surjektiv?

(b) Was ist das Bild des Einheitskreises?

(c) Worauf wird die Einheitskreisscheibe ohne 0 abgebildet?

(d) Was ist das Bild der oberen Halbebene (ohne reelle Achse)?

3 Komplexe Integralrechnung

Anders als in der reellen ANALYSIS sind die Integranden der FUNKTIONENTHEORIE mindestens stetig, meist sogar holomorph. Die im Reellen zentrale Frage nach der Integrierbarkeit von Funktionen entfällt daher im Komplexen, dafür tritt jetzt die komplexe Variante des vom Reellen bekannten Kurvenintegrals ins Zentrum des Interesses.

3.1 Der Integralbegriff

Die Einführung des für komplexe Funktionen adäquaten Integralbegriff erfolgt in drei Schritten. In einem ersten Schritt definiert man für jede auf einem Intervall $[a,b]$ stetige Funktion $h:[a,b]\to\mathbb{C}$ das Integral auf die denkbar naheliegendste Weise als

$$\int_a^b h(t)\,dt \;:=\; \int_a^b [\operatorname{Re} h(t)]\,dt \;+\; i\int_a^b [\operatorname{Im} h(t)]\,dt\,. \tag{3.1}$$

Damit ist dieser Integraltyp auf den des eindimensionalen Riemann-Integrals zurückgeführt, und es lassen sich die bekannten Erkenntnisse aus der elementaren ANALYSIS verwenden. In einem zweiten Schritt definiert man für jede auf dem Bild $\gamma([a,b])$ einer C^1-Kurve $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ erklärte stetige Funktion $f:\gamma([a,b])\to\mathbb{C}$ das **Kurvenintegral** von f längs γ,

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;:=\; \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\dot\gamma(t)\,dt\,. \tag{3.2}$$

Offensichtlich ist dieses Integral auf das vorherige zurückgeführt. Da die in der FUNKTIONENTHEORIE auftretenden Integrationswege aber in der Regel nicht „glatt“ sind, sondern „Ecken“ aufweisen, betrachtet man in einem dritten Schritt an Stelle von C^1-Kurven **Wege**, das sind stetige Kurven $\omega:[a,b]\to\mathbb{C}$, zu denen es eine Zerlegung $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ des Intervalls $[a,b]$ gibt, sodass die Einschränkungen $\omega_1,\ldots,\omega_n$ von ω auf die Intervalle $[t_0,t_1],\ldots,[t_{n-1},t_n]$ C^1-Kurven sind. Für jede stetige Funktion $f:\omega([a,b])\to\mathbb{C}$ definiert man dann das komplexe **Weg-** oder **Kurvenintegral** von f längs ω als

$$\int_\omega f(z)\,dz \;:=\; \sum_{k=1}^n \int_{\omega_k} f(z)\,dz\,. \tag{3.3}$$

Den Kern des komplexen Integralbegriffs bildet das Kurvenintegral (3.2), denn auf der einen Seite führt es in nahe liegender Weise zum allgemeinen Wegintegral (3.3), und andererseits enthält es den grundlegenden Integralbegriff (3.1) als Spezialfall, wie man an der speziellen Wahl $\gamma(t) \equiv t$ sofort erkennt.

Da der Hauptgegenstand der komplexen Integrationstheorie – das Kurvenintegral (3.2) – auf dem Integralbegriff (3.1) aufbaut, beschäftigen wir uns zunächst mit der Integration von Funktionen von Intervallen nach $\mathbb{C}$. Dabei ergeben sich die folgenden Aussagen – wegen der engen Anbindung des Integralbegriffs (3.1) an das eindimensionale Riemann-Integral – mehr oder weniger direkt aus den entsprechenden Ergebnissen der reellen ANALYSIS.

3.1.1 Folgerung (Linearität): *Für stetige Funktionen $g, h : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\int_a^b \big[\, \alpha\, g(t) + \beta\, h(t) \big]\, dt \;=\; \alpha \int_a^b g(t)\, dt \;+\; \beta \int_a^b h(t)\, dt\,.$$

Begründung: Folgt mittels Definition (3.1) unmittelbar aus der Linearität des Riemann-Integrals. ∎

3.1.2 Satz (Integralungleichung): *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ stetig, so gilt*

$$\Big| \int_a^b f(t)\, dt \Big| \;\leq\; \int_a^b \big| f(t) \big|\, dt\,.$$

Beweis: Um die Aussage des Satzes auf den Fall einer reellwertigen Funktion f zurückzuführen, für die die Integralungleichung aus der reellen ANALYSIS bekannt ist, wählen wir eine komplexe Zahl c vom Betrage 1, sodass das Produkt $c \int_a^b f(t)\, dt$ reell ist. Dann ist auch das Integral $\int_a^b c f(t)\, dt$ reell, und so folgt $c \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b [\mathrm{Re}\,(c f(t))]\, dt$. Unter Verwendung der Integralungleichung für reellwertige Funktionen und der Beziehung $|c| = 1$ gilt dann

$$\Big| \int_a^b f(t)\, dt \Big| = \Big| c \int_a^b f(t)\, dt \Big| = \Big| \int_a^b \big[\mathrm{Re}\,(c f(t))\big]\, dt \Big| \leq \int_a^b \big| \mathrm{Re}\,(c f(t)) \big|\, dt\,.$$

Wegen $|\mathrm{Re}\,(c f(t))| \leq |c f(t)| = |f(t)|$ lässt sich diese Ungleichung weiter nach oben abschätzen durch $\int_a^b |f(t)|\, dt$. ∎

Im Hinblick auf die Formulierung der komplexen Variante des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung nennen wir wie im Reellen eine differenzierbare Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine **Stammfunktion** von $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, wenn $\dot{F}(t) = f(t)$ für alle $t \in [a,b]$ gilt.

3.1.3 Satz (Hauptsatz der komplexen Differenzial- und Integralrechnung): *(a) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig, so ist die Funktion*

$$F(t) := \int_a^t f(\tau)\, d\tau\,, \quad F : [a,b] \to \mathbb{C} \tag{3.4}$$

eine Stammfunktion von f.
(b) Ist $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, so gilt

$$\int_\alpha^\beta f(\tau)\, d\tau \;=\; F(\beta) - F(\alpha) \quad \text{für alle } \alpha, \beta \in \mathbb{C}\,.$$

(c) Die Differenz zweier Stammfunktionen einer Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ist konstant auf $[a,b]$.

Beweis: Folgt durch Übergang zu Real- und Imaginärteil und Anwendung des Hauptsatzes der reellen Differenzial- und Integralrechnung. ■

3.1.4 Folgerung (Partielle Integration): *Sind $g, h : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int_a^b g(t)\,\dot{h}(t)\, dt \;=\; g(b)\,h(b) - g(a)\,h(a) - \int_a^b \dot{g}(t)\,h(t)\, dt\,.$$

Begründung: Sei F eine (nach Satz 3.1.3 (a) existierende) Stammfunktion von $\dot{g}h$. Dann ist $gh - F$ eine Stammfunktion von $g\dot{h}$, und die Behauptung folgt sofort aus Satz 3.1.3 (b). ■

3.1.5 Folgerung (Integration durch Substitution): *Ist I ein Intervall und $\varphi : I \to [a,b]$ stetig differenzierbar, so gilt für jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$*

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\,\dot{\varphi}(t)\, dt \;=\; \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\, dt \quad \text{für alle } \alpha, \beta \in I\,.$$

Begründung: Es sei F eine Stammfunktion von f. Nach der Kettenregel ist dann $F \circ \varphi$ eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi) \cdot \dot{\varphi}$, und die Behauptung folgt durch zweimalige Anwendung von Satz 3.1.3 (b), denn beide Seiten der zu beweisenden Identität sind gleich $F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$. ■

Damit sind unsere Betrachtungen zum Integraltyp (3.1) abgeschlossen und wir können uns dem Hauptgegenstand der komplexen Integralrechnung zuwenden, den Kurvenintegralen. Da bei der Analyse dieser Integrale häufig die Länge der Integrationswege eine wichtige Rolle spielt, übertragen wir zunächst den vom Reellen bekannten Begriff der Bogenlänge auf komplexe Kurven und Wege. Ist also $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine C^1-Kurve, so nennen wir die reelle Zahl

$$L(\gamma) \;:=\; \int_a^b \big|\dot{\gamma}(t)\big| \, dt \tag{3.5}$$

die **Bogenlänge** von γ. Ist $\omega : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg mit der Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, und bezeichnet ω_k die Einschränkung von ω auf das Teilintervall $[t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \ldots, n$, so nennen wir die Summe

$$L(\omega) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} L(\omega_k) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \big|\dot{\omega}_k(t)\big| \, dt \tag{3.6}$$

die **Bogenlänge** des Weges ω.

Da die in der Funktionentheorie auftretenden Integrationswege fast immer aus Geradenstücken und Kreisbögen zusammengesetzt sind, betrachten wir diese beiden Kurventypen etwas näher.

3.1.6 Beispiele: Die geradlinige Verbindung zwischen zwei Punkten z_0 und z_1 in $\mathbb{C}$ lässt sich am einfachsten mit Hilfe der Funktion

$$\gamma(t) \;:=\; z_0 + t\,(z_1 - z_0)\,, \quad \gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$$

parametrisieren. Die Bogenlänge dieser **Verbindungsstrecke** ist erwartungsgemäß

$$L(\gamma) \;=\; \int_0^1 |\dot{\gamma}(t)| \, dt \;=\; \int_0^1 |z_1 - z_0| \, dt \;=\; |z_1 - z_0|\,.$$

Die Standardparametrisierung für einen **Kreisbogen** auf einem Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius r hat die Form

$$\kappa(t) \;:=\; z_0 + r\,e^{it}\,, \quad \kappa : [a, b] \to \mathbb{C}\,.$$

Die zugehörige Bogenlänge

$$L(\kappa) \;=\; \int_a^b \big|\dot{\kappa}(t)\big| \, dt \;=\; \int_a^b \big|i r e^{it}\big| \, dt \;=\; \int_a^b r \, dt \;=\; (b - a)\,r$$

hat im Fall des Vollkreises den zu erwartenden Wert $2\,r\pi$. ◊

Als letzte Vorüberlegung zum *komplexen* Kurvenintegral wollen wir jetzt klären, welches der in der reellen Analysis auftretenden *reellen* Kurvenintegrale das passende Gegenstück ist. Da sich die reelle Darstellung $(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ einer komplexen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in natürlicher Weise als Vektorfeld des $\mathbb{R}^2$ interpretieren lässt, bietet sich das so genannte Kurvenintegral 2. Art der reellen Analysis als Analogon zum komplexen Kurvenintegral (3.2) an. Dass diese Vorstellung in der Tat richtig ist, besagt der nun folgende Satz, der sich als nützliches Hilfsmittel zur Übertragung von bekannten Ergebnissen der reellen Analysis aufs Komplexe erweisen wird.

Wir erinnern an dieser Stelle, dass für eine C^1-Kurve $\gamma = (\alpha, \beta) : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ und eine stetige Funktion $(p,q) : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}^2$ das reelle Kurvenintegral von (p,q) längs γ in der Form

$$\int_\gamma p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy \;=\; \int_a^b \big[\,p\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\,\dot\alpha(t) + q\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\,\dot\beta(t)\big]\,dt \qquad (3.7)$$

durch das rechts stehende Riemann-Integral definiert ist.

3.1.7 Satz (Beziehung zwischen reellem und komplexem Kurvenintegral) : *Gegeben sei eine C^1-Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ und eine stetige Funktion $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$. Bezeichnet dann wie üblich $(u,v) : \gamma([a,b]) \to \mathbb{R}^2$ die reelle Darstellung von f, so gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; \int_\gamma \big[u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy\big] \;+\; i\int_\gamma \big[u(x,y)\,dy + v(x,y)\,dx\big]\,.$$

Als <u>formale Merkregel</u> für diesen Satz hat sich der folgende Ausdruck bewährt:

$$f\,dz \;=\; (u+iv)\,(dx+i\,dy) \;=\; [u\,dx - v\,dy] + i\,[v\,dy + u\,dx]\,.$$

Beweis von Satz 3.1.7: Der Beweis besteht aus einer einfachen Rechnung: Schreiben wir $\gamma(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$ mit reellwertigen $\alpha(t)$ und $\beta(t)$, so gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)\,dz \;&\overset{(3.2)}{=}\; \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot\gamma(t)\,dt \\
&=\; \int_a^b \big[\,u\big(\alpha(t),\beta(t)\big) + i\,v\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\big]\cdot\big[\,\dot\alpha(t) + i\,\dot\beta(t)\big]\,dt \\
&\overset{(3.1)}{=}\; \int_a^b \big[\,u\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\,\dot\alpha(t) - v\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\,\dot\beta(t)\big]\,dt \;+ \\
&\qquad + i\int_a^b \big[\,v\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\,\dot\alpha(t) + u\big(\alpha(t),\beta(t)\big)\,\dot\beta(t)\big]\,dt\,.
\end{aligned}$$

Mit Blick auf (3.7) ist damit der Beweis abgeschlossen. ■

Aufgaben

1. Bestimmen Sie folgende Integrale, durch Rechnung oder anderweitig:

(a) $\int_\gamma \frac{dz}{z}$, $\gamma(t) = \cos t + 2i \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$,

(b) $\int_\gamma \frac{dz}{z^2}$, $\gamma(t) = \cos t + 2i \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$,

(c) $\int_\gamma \frac{e^z}{z}\, dz$, $\gamma(t) = 2 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$,

(d) $\int_\gamma \frac{dz}{z^2-1}$, $\gamma(t) = 1 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

2. Beweisen Sie mit Hilfe reeller Analysis: Ist $\gamma : [a, b] \to G$ eine geschlossene C^1-Kurve, G ein Sterngebiet in $\mathbb{C}$, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und $f' : G \to \mathbb{C}$ stetig, so gilt

$$\int_\gamma f(z)\, dz \;=\; 0\,.$$

3.2 Komplexe Kurvenintegrale

Bevor wir uns den *theoretischen* Aspekten des Wegintegrals zuwenden, betrachten wir ein für die FUNKTIONENTHEORIE grundlegendes *konkretes* Beispiel.

3.2.1 Beispiel: Für ein $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ ist $\gamma(t) := a + r\,e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, die Parametrisierung des im mathematisch positiven Sinn durchlaufenen Kreises um a mit Radius r. Hierfür gilt die Beziehung

$$\boxed{\int_\gamma (\zeta - a)^n \, d\zeta \;=\; \begin{cases} 2\pi i\,, & \text{falls } n = -1\,, \\ 0\,, & \text{falls } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}\,. \end{cases}} \tag{3.8}$$

Wegen $\dot\gamma(t) = r\,i\,e^{it}$ gilt nämlich

$$\int_\gamma (\zeta - a)^n \, d\zeta \;=\; \int_0^{2\pi} (r\,e^{it})^n \cdot r\,i\,e^{it}\,dt \;=\; r^{n+1} \int_0^{2\pi} i\,e^{i(n+1)t}\,dt\,.$$

Im Fall $n = -1$ hat dieses Integral den Wert $\int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$. Ist dagegen $n \neq -1$, so ist $F(t) := \frac{1}{n+1}\,e^{i(n+1)t}$ eine Stammfunktion von $i\,e^{i(n+1)t}$, folglich ist das Integral über den geschlossenen Weg γ gleich $F(2\pi) - F(0) = 0$.

Die Tatsache, dass das Integral (3.8) für $n = -1$ nicht verschwindet, ist für die FUNKTIONENTHEORIE von so grundlegender Bedeutung, dass wir noch eine zweite Möglichkeit angeben, diese Besonderheit auszudrücken. Die Integration der Funktion $(\zeta - a)^{-1}$ kann nämlich längs verschiedener Wege mit gleichen Anfangs- und Endpunkten unterschiedliche Ergebnisse liefern. Wählen wir z. B. die beiden Wege $\gamma^+(t) := a + r\,e^{it}$ und $\gamma^-(t) := a + r\,e^{-it}$, jeweils für $t \in [0, \pi]$, von $a + r$ nach $a - r$, so erhalten wir mit der gleichen Rechnung wie zuvor

$$\boxed{\int_\gamma (\zeta - a)^{-1} \, d\zeta \;=\; \begin{cases} \pi i\,, & \text{falls } \gamma = \gamma^+\,, \\ -\pi i\,, & \text{falls } \gamma = \gamma^-\,. \end{cases}} \tag{3.9}$$

Der Wert des Integrals hängt damit nicht nur vom Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweg ab, sondern vom gesamten Kurvenverlauf. ◊

Wir beginnen unsere theoretischen Überlegungen mit der Übertragung zweier Ergebnisse des vorherigen Abschnitts auf das komplexe Kurvenintegral.

3.2.2 Folgerung (Linearität): *Gegeben seien ein Weg $\omega : [a, b] \to \mathbb{C}$, zwei stetige Funktionen $f, g : \omega([a, b]) \to \mathbb{C}$ und komplexe Zahlen α, β. Dann gilt*

$$\int_\omega \big[\,\alpha\,f(z) + \beta\,g(z)\big]\,dz \;=\; \alpha \int_\omega f(z)\,dz \;+\; \beta \int_\omega g(z)\,dz\,.$$

Begründung: Wegen (3.3) kann man ω als C^1-Kurve annehmen. Die Behauptung folgt dann auf Grund der Definition (3.2) unmittelbar aus der Folgerung 3.1.1. ■

Von zentraler Bedeutung für das Kommende ist der folgende Satz.

3.2.3 Satz (Abschätzung für Wegintegrale): *Ist $\omega : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $f : \omega([a,b]) \to \mathbb{C}$ stetig, so gilt die* ***Integralabschätzung***

$$\Big| \int_\omega f(z)\,dz \Big| \;\le\; L(\omega) \max_{t\in[a,b]} \big|f(\omega(t))\big|\,. \tag{3.10}$$

Beweis: Es sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ die Zerlegung des gegebenen Weges und ω_k die Einschränkung von ω auf das Teilintervall $[t_{k-1}, t_k]$ für $k = 1, \ldots, n$. Für jedes k gilt dann für den Teilweg ω_k die Abschätzung

$$\Big| \int_{\omega_k} f(z)\,dz \Big| \;=\; \Big| \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\omega_k(t))\,\dot\omega_k(t)\,dt \Big| \;\overset{3.1.2}{\le}\; \int_{t_{k-1}}^{t_k} \big|f(\omega_k(t))\big|\,\big|\dot\omega_k(t)\big|\,dt\,.$$

Mit reeller Integralrechnung lässt sich diese Abschätzung wie folgt fortsetzen:

$$\le\; \Big[\max_{t\in[t_{k-1},t_k]} |f(\omega_k(t))| \Big] \cdot \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\dot\omega_k(t)|\,dt \;\overset{(3.5)}{=}\; \Big[\max_{t\in[t_{k-1},t_k]} |f(\omega_k(t))| \Big]\, L(\omega_k)\,.$$

Damit gilt schließlich für den Gesamtweg ω

$$\begin{aligned} \Big| \int_\omega f(z)\,dz \Big| \;&\overset{(3.3)}{\le}\; \sum_{k=1}^{n} \Big| \int_{\omega_k} f(z)\,dz \Big| \;\le\; \sum_{k=1}^{n} \Big[\max_{t\in[t_{k-1},t_k]} |f(\omega_k(t))| \Big] L(\omega_k) \\ &\le\; \max_{t\in[a,b]} |f(\omega(t))| \sum_{k=1}^{n} L(\omega_k) \;\overset{(3.6)}{=}\; \max_{t\in[a,b]} |f(\omega(t))|\, L(\omega)\,. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis der Integralabschätzung abgeschlossen. ■

Aus der Abschätzung für Wegintegrale ergibt sich leicht der folgende Satz über die Vertauschung von Grenzwert und Integral bei Folgen stetiger Funktionen.

3.2.4 Satz (über die Vertauschung von Integral und Grenzwert): *Es sei $\omega : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Weg und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : \omega([a,b]) \to \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \omega([a,b]) \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\omega f_n(z)\,dz \;=\; \int_\omega \big[\lim_{n\to\infty} f(z)\big]\,dz \;=\; \int_\omega f(z)\,dz\,.$$

Beweis: Die Stetigkeit der Grenzfunktion – und damit die Existenz des Integrals $\int_\omega f(z)\,dz$ – folgt aus einem Satz der elementaren ANALYSIS, und die Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz impliziert, dass

$$M_n := \max_{t\in[a,b]} \big| f_n(\omega(t)) - f(\omega(t)) \big| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty\,.$$

Damit gilt dann

$$\Big| \int_\omega f_n(z)\,dz - \int_\omega f(z)\,dz \Big| \;=\; \Big| \int_\omega \big[f_n(z) - f(z) \big]\,dz \Big| \overset{3.2.3}{\leq} L(\omega)\,M_n\,,$$

und der Beweis ist beendet. ■

Durch Betrachtung von Partialsummen gewinnt man sofort die Reihenvariante des vorherigen Satzes:

3.2.5 Korollar (zu Satz 3.2.4): *Sei $\omega : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Weg und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : \omega([a,b]) \to \mathbb{C}$. Konvergiert dann die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : \omega([a,b]) \to \mathbb{C}$, so gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_\omega f_n(z)\,dz \;=\; \int_\omega \Big[\sum_{n=1}^{\infty} f(z) \Big]\,dz \;=\; \int_\omega f(z)\,dz\,.$$

Die Frage nach der Abhängigkeit des komplexen Wegintegrals von der Parametrisierung des betrachteten Weges lässt sich wie im Reellen beantworten.

3.2.6 Satz (Umparametrisierung von Wegintegralen): *Es sei $\omega : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Weg und $f : \omega([a,b]) \to \mathbb{C}$ stetig. Ist dann $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ eine bijektive C^1-Funktion, so ist auch $\psi := \omega \circ \varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ ein Weg, und es gilt*

$$\int_\psi f(z)\,dz \;=\; \begin{cases} \displaystyle\int_\omega f(z)\,dz \;, & \text{falls } \varphi(\alpha) = a \text{ und } \varphi(\beta) = b\,, \\ \displaystyle -\int_\omega f(z)\,dz \;, & \text{falls } \varphi(\alpha) = b \text{ und } \varphi(\beta) = a\,. \end{cases}$$

Beweis: Der Beweis verläuft wie im Reellen: Zunächst gilt $\dot\psi(t) = \dot\omega(\varphi(t))\,\dot\varphi(t)$ für alle $t \in [a,b] \setminus \{t_1,\ldots,t_{n-1}\}$, und damit folgt, mit der Substitution $s = \varphi(t)$,

$$\begin{aligned} \int_\psi f(z)\,dz \;&=\; \int_\alpha^\beta f\big(\psi(t)\big)\,\dot\psi(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f\big(\omega(\varphi(t))\big)\,\dot\omega\big(\varphi(t)\big)\,\dot\varphi(t)\,dt \\ &=\; \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f\big(\omega(s)\big)\,\dot\omega(s)\,ds\,. \end{aligned}$$

Im Fall $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ ist dieses Integral gleich $\int_\omega f(z)\,dz$, und im Fall $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$ ist es das Negative hiervon. ∎

Wegen des Satzes 3.2.6 ist es möglich – und allgemein üblich –, an Stelle einer Funktion γ im Symbol $\int_\gamma$ für das Kurvenintegral eine Punktmenge M zu verwenden. Damit ist dann gemeint, dass das Kurvenintegral längs eines Weges γ zu bilden ist, dessen Bild die Menge M ist. Hierbei muss natürlich aus dem Zusammenhang hervorgehen, in welchem Sinne die „Kurve" M – betrachtet als geometrisches Gebilde – durchlaufen wird. Bei einer geschlossenen Kurve geht man dabei stets davon aus – wenn nichts Anderes gesagt wird –, dass die Kurve im mathematisch positiven Sinne genau einmal durchlaufen wird.

3.2.7 Beispiele: Sind z_0 und z_1 zwei komplexe Zahlen, so bezeichnen wir mit $[z_0, z_1]$ die **(orientierte) Verbindungsstrecke von z_0 nach z_1**, d.h., das Bild des Intervalls $[0,1]$ unter der Abbildung $t \mapsto z_0 + t(z_1 - z_0)$. Für eine auf einer Umgebung U von $[z_0, z_1]$ stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ gilt damit

$$\int_{[z_0,z_1]} f(z)\,dz \;=\; \int_0^1 f\big(z_0 + t(z_1 - z_0)\big)\,(z_1 - z_0)\,dt\,. \tag{3.11}$$

Ein weiteres Standardbeispiel ist das Symbol $S_r(a)$ für den vermittels der Parametrisierung $t \mapsto a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, beschriebenen **(positiv orientierten) Kreis um a mit Radius r**. Es gilt also

$$\int_{S_r(a)} f(z)\,dz \;=\; \int_0^{2\pi} f\big(a + re^{it}\big)\,rie^{it}\,dt \tag{3.12}$$

für jede in einer Umgebung U von $S_r(a)$ stetige Funktion $f : U \to \mathbb{C}$. ◊

Wir beenden diesen Abschnitt, indem wir die aus (3.8) ersichtliche Formel

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - a} \;=\; 1 \tag{3.13}$$

zu einem für spätere Zwecke grundlegenden Sachverhalt ausbauen.

3.2.8 Satz (über das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$): *Für beliebige $a \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ gilt*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \;=\; \begin{cases} 1 & \text{für alle } z \in U_r(a)\,, \\ 0 & \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{U_r(a)}\,. \end{cases}$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir seine Aussage etwas näher erläutern. Betrachtet man das darin auftretende Integral als Funktion von z, so ist diese Funktion für die Punkte auf dem Kreis $S_r(a)$ nicht erklärt, denn die Integrationsvariable ζ durchläuft – parametrisiert durch $a + r\,e^{it}$ – diesen Kreis. Ansonsten nimmt diese Funktion nur zwei Werte an, nämlich 1 in der (offenen) Kreisscheibe $U_r(a)$, und 0 außerhalb der (abgeschlossenen) Kreisscheibe $\overline{U_r(a)}$; sie ist also eine Art „charakteristische Funktion" für die Kreisscheibe $U_r(a)$.

Beweis von Satz 3.2.8: Mit Hilfe der Summenformel $\sum_{k=0}^{\infty} c^k = \frac{1}{1-c}$ für die geometrische Reihe, die bekanntlich für alle komplexen c mit $|c| < 1$ gilt, formen wir zunächst den Integranden wie folgt um: für alle $\zeta \in S_r(a)$ gilt

$$\frac{1}{\zeta - z} = \begin{cases} \dfrac{1}{\zeta - a} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{z-a}{\zeta - a}\Big)^k & \text{für alle } z \in U_r(a)\,, \\ \dfrac{1}{a - z} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{\zeta-a}{z - a}\Big)^k & \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \overline{U_r(a)}\,. \end{cases} \tag{3.14}$$

Die für den ersten Fall exemplarische Begründung lautet, dass $|z-a| < |\zeta - a|$ gilt und folglich

$$\frac{1}{\zeta - a} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{z-a}{\zeta - a}\Big)^k = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} = \frac{1}{\zeta - z}\,.$$

Als Nächstes stellen wir fest, dass die in (3.14) auftretenden Reihen als Funktionen von $\zeta \in S_r(a)$, bei festgehaltenen a und z, gleichmäßig konvergieren. Als Begründung hierfür dient das Weierstraß-Kriterium, denn wählt man – exemplarisch für den ersten Fall – ein komplexes w, sodass $|z-a| < |w-a| < r$ gilt, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{|w-a|}{r})^k$ eine zur Anwendung dieses Kriteriums geeignete Majorante.

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir zum Beweis des ersten Teils der zu beweisenden Beziehung ein festes $z \in U_r(a)$. Dann gilt[1]

$$\int\limits_{S_r(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \overset{(3.14)}{=} \int\limits_{S_r(a)} \frac{1}{\zeta - a} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{z-a}{\zeta - a}\Big)^k d\zeta \overset{3.2.5}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (z-a)^k \int\limits_{S_r(a)} \frac{d\zeta}{(\zeta - a)^{k+1}}\,.$$

Gemäß (3.8) verschwinden von den rechts stehenden Integralen alle bis auf das erste, und das hat den Wert $2\pi i$.

Betrachten wir schließlich ein festes $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{U_r(a)}$, so gilt

$$\int\limits_{S_r(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \overset{(3.14)}{=} \int\limits_{S_r(a)} \frac{1}{a - z} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{\zeta-a}{z - a}\Big)^k d\zeta \overset{3.2.5}{=} -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^{k+1}} \int\limits_{S_r(a)} (\zeta - a)^k\,.$$

[1] Dass man die Integranden eines Kurvenintegrals wie hier gezeigt umformen kann, liegt daran, dass es für die Gleichheit zweier Integrale $\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_\gamma g(\zeta)\,d\zeta$ genügt, dass f und g auf dem Bild $\gamma([a,b])$ der Kurve γ übereinstimmen. Die zugehörigen Riemann-Integrale sind nämlich $\int_a^b f(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt$ bzw. $\int_a^b g(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)\,dt$, und stimmen folglich überein.

Jetzt verschwinden gemäß (3.8) alle Integrale auf der rechten Seite, und der Beweis des Satzes ist damit abgeschlossen. ■

Aufgaben

1. Zeigen Sie: Für die Schar von Wegen $\gamma_R(t) := Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, $R > 0$, gilt

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^3+1} = 0\,.$$

2. Gegeben sei eine C^1-Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ und eine stetige Funktion $f : \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass es dann um jedem Punkt $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b])$ eine Umgebung $U_r(a)$ gibt, auf der sich die Funktion

$$g(z) := \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,, \quad g : \mathbb{C} \setminus \gamma([a, b]) \to \mathbb{C}$$

in eine konvergente Potenzreihe entwickeln lässt.

Hinweis: Manipulieren Sie den Ausdruck $\frac{1}{\zeta - z}$ mit Hilfe der geometrischen Reihe (wie im Beweis des Satzes 3.2.8).

3.3 Wegunabhängige Integrierbarkeit

Wie in der reellen ANALYSIS stellt sich auch beim komplexen Kurvenintegral die Frage, ob der Wert eines Kurvenintegrals „wegabhängig" ist oder bereits durch den Anfangs- und Endpunkt des Integrationswegs festgelegt ist. Wie das Beispiel 3.2.1 – insbesondere die Beziehung (3.9) – zeigt, ist die „Wegabhängigkeit" der Integration schon bei sehr einfachen Integranden möglich. Umso wichtiger ist es, Kriterien für die wegunabhängige Integrierbarkeit zu finden.

Wir nennen eine auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ stetige Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ **wegunabhängig integrierbar**, wenn für je zwei beliebige Punkte $z_0, z_1 \in G$ die Kurvenintegrale $\int_\gamma f(z)\,dz$ längs beliebiger Wege γ mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1 den gleichen Wert besitzen. Wie im Reellen werden auch jetzt wieder **Stammfunktionen** von f eine zentrale Rolle spielen, also holomorphe Funktionen $F : G \to \mathbb{C}$ mit $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in G$.

3.3.1 Satz (Äquivalente Bedingungen für wegunabhängige Integrierbarkeit): *Ist G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig, so sind die folgenden drei Bedingungen äquivalent:*

(i) f ist in G wegunabhängig integrierbar,

(ii) f besitzt eine Stammfunktion in G,

(iii) $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in G.

3.3.2 Korollar (zu Satz 3.3.1): *Ist eine der drei Bedingungen des Satzes 3.3.1 erfüllt (und damit auch die anderen beiden), so gilt Folgendes:*

(a) Ist $F : G \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f und γ ein Weg in G mit Anfangspunkt z und Endpunkt w, so gilt

$$\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta \;=\; F(w) - F(z)\,. \tag{3.15}$$

(b) Eine Stammfunktion F von f lässt sich gewinnen, indem man einen beliebigen Punkt $z_0 \in G$ fixiert, zu jedem Punkt $z \in G$ einen beliebigen Weg γ_z in G mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z wählt, und dann $F : G \to \mathbb{C}$ wie folgt definiert:

$$F(z) \;:=\; \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,d\zeta\,. \tag{3.16}$$

Das Korollar 3.3.2 kann man als **Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung für komplexe Kurvenintegrale** bezeichnen, denn beschreiben die betrachteten Wege γ bzw. γ_z Intervalle (auf der reellen Achse), so erhält man die bekannte reelle Version dieses Satzes.

Beweis von Satz 3.3.1 und Korollar 3.3.2: $\underline{(i) \Rightarrow (ii)}$: Wir beweisen die Gültigkeit dieser Implikation, indem wir nachweisen, dass unter der Voraussetzung (i) die in (3.16) definierte Funktion eine Stammfunktion von f ist.

Um zu zeigen, dass in einem beliebigen – von nun an festgehaltenen – Punkt $z_1 \in G$ die Beziehung $F'(z_1) = f(z_1)$ gilt, wählen wir zu z_1 eine Umgebung $U_\rho(z_1) \subseteq G$ und definieren dort die Funktion

$$r(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{z - z_1} \displaystyle\int_{[z_1,z]} f(\zeta)\, d\zeta & \text{für } z \in \dot{U}_\rho(z_1)\,, \\ f(z_1) & \text{für } z = z_1\,. \end{cases} \tag{3.17}$$

Dann gilt (siehe Abbildung) die Identität $F(z) = F(z_1) + (z - z_1)r(z)$ für alle $z \in U_\rho(z_1)$, und mit Blick auf Satz 2.1.3 erkennen wir, dass nur noch die Stetigkeit von r bei z_1 zu beweisen ist (denn dann gilt $F'(z_1) = r(z_1) = f(z_1)$). Zum Zwecke dieses Nachweises stellen wir fest, dass (wegen $\int_{[z_1,z]} f(z_1)\, d\zeta = f(z_1) \int_{[z_1,z]} d\zeta = f(z_1)(z - z_1)$) folgende Beziehung gilt:

$$r(z) - r(z_1) \;=\; \frac{1}{z - z_1} \int_{[z_1,z]} \big[f(\zeta) - f(z_1) \big]\, d\zeta \quad \text{für alle } \; z \in \dot{U}_\rho(z_1)\,.$$

Mit der Integralabschätzung folgt dann (wegen $L([z_1, z]) = |z - z_1|$),

$$\big| r(z) - r(z_1) \big| \;\le\; \max_{\zeta \in [z_1,z]} \big| f(\zeta) - f(z_1) \big| \quad \text{für alle } \; z \in \dot{U}_\rho(z_1)\,,$$

und da f stetig ist, strebt die rechte – und damit auch die linke – Seite dieser Ungleichung für $z \to z_1$ gegen 0. Das beweist die Stetigkeit von r bei z_1.

$\underline{(ii) \to (iii)}$: Den Nachweis, dass diese Implikation gültig ist, erbringen wir, indem wir die Aussage (a) des Korollars verifizieren. Hieraus folgt dann die Behauptung mit $w = z$.

Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine C^1-Kurve mit Anfangspunkt z und Endpunkt w, so gilt (wegen $F' = f$ nach Voraussetzung)

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta \;=\; \int_a^b F'(\gamma(t))\, \dot\gamma(t)\, dt \overset{(2.14)}{=} \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t))\, dt \overset{3.1.3}{=} F(w) - F(z)\,.$$

Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg mit der Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, und bezeichnet z_k den Anfangspunkt der C^1-Kurve $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ und w_k den Endpunkt,

$k = 1, \ldots, n$, so gilt zunächst $z_1 = z$, $w_k = z_{k+1}$ für $k = 1, \ldots, n-1$ und $w_n = w$, und mit dem bereits Bewiesenen folgt

$$\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(\zeta)\, d\zeta = \sum_{k=1}^{n} \big[F(w_k) - F(z_{k+1})\big] = F(w) - F(z)\,.$$

<u>$(iii) \to (i)$</u>: Übungsaufgabe

Nachdem nun die Äquivalenz der drei Bedingungen des Satzes 3.3.1 bewiesen ist, ist auch der Beweis des Korollars erbracht. Im ersten Schritt $(i) \Rightarrow (ii)$ wurde nämlich gezeigt, dass die Aussage (b) aus (i) folgt, und im zweiten Schritt $(ii) \Rightarrow (iii)$ wurde (a) aus (ii) gefolgert. ∎

Da die in Satz 3.3.1 und Korollar 3.3.2 auftretenden Bedingungen in der Regel nur schwer zu verifizieren sind, ist man an einfacheren und leichter nachprüfbaren Bedingungen interessiert. Dies gelingt z.B. in so genannten Sterngebieten. Dabei heißt ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ **Sterngebiet**, wenn es einen Punkt $z_0 \in G$ gibt, so dass die Verbindungsstrecken $[z_0, z]$ von z_0 zu allen Punkten $z \in G$ ganz in G liegen. Jeder solche Punkt z_0 heißt **Zentrum** von G. Offensichtlich ist jede konvexe offene Menge in $\mathbb{C}$ ein Sterngebiet, ebenso die geschlitzte Ebene $\mathbb{C}^-$.

Da in Sterngebieten „Dreieckswege" eine besondere Rolle spielen, präzisieren wir zunächst, was wir unter einem **(kompakten) Dreieck** mit den **Ecken** $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ verstehen wollen, nämlich eine Menge der Form

$$\begin{aligned}\Delta &:= \{z \in \mathbb{C} : z = z_1 + \sigma(z_2 - z_1) + \tau(z_3 - z_2),\, \sigma \geq 0,\, \tau \geq 0,\, \sigma + \tau \leq 1\} \\ &= \{z \in \mathbb{C} : z = r z_1 + s z_2 + t z_3, r \geq 0,\, s \geq 0,\, t \geq 0,\, r + s + t = 1\}\,.\end{aligned}$$

Den **Rand** $\partial\Delta$ eines solchen Dreiecks parametrisieren wir in nahe liegender Weise anhand eines **Dreiecksweges**, der – ausgehend von einer Ecke – die Seiten des Dreiecks einmal durchläuft.

Mit dieser Begriffsbildung sind wir nun in der Lage, eine relativ einfache hinreichende Bedingung für die wegunabhängige Integrierbarkeit zu formulieren.

3.3.3 Satz (Dreieckswege in Sterngebieten): *Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet mit Zentrum z_0, und $f : G \to \mathbb{C}$ sei stetig. Gilt dann*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz = 0 \quad \text{für jedes Dreieck } \Delta \subset G \text{ mit einer Ecke in } z_0\,, \tag{3.18}$$

so gelten die drei (äquivalenten) Aussagen des Satzes 3.3.1. Insbesondere erhält man eine Stammfunktion von f auf G wie folgt:

$$F(z) := \int_{[z_0, z]} f(\zeta)\, d\zeta\,, \quad F : G \to \mathbb{C}\,. \tag{3.19}$$

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass für die in (3.19) definierte Funktion an einem beliebig gewählten Punkt $z_1 \in G$ die Beziehung $F'(z_1) = f(z_1)$ gilt. Um dies zu zeigen, wählen wir um z_1 eine Umgebung $U_\rho(z_1) \subseteq G$. Für jeden Punkt $z \in U_\rho(z_1)$ liegt dann das Dreieck Δ mit den Ecken z_0, z, z_1 ganz in G, und da das Integral $\int_{\partial\Delta} f(\zeta)\,d\zeta$ nach Voraussetzung verschwindet, gilt

$$\int\limits_{[z_0,z_1]} f(\zeta)\,d\zeta + \int\limits_{[z_1,z]} f(\zeta)\,d\zeta + \int\limits_{[z,z_0]} f(\zeta)\,d\zeta = 0\,.$$

Wegen $\int_{[z,z_0]} f(\zeta)\,d\zeta = -\int_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta$ impliziert dies

$$F(z_1) + \int\limits_{[z_1,z]} f(\zeta)\,d\zeta = F(z) \quad \text{für alle } z \in U_\rho(z_1)\,.$$

Wenn wir nun die Funktion $r(z)$ exakt wie in (3.17) definieren, können wir wortwörtlich wie im Beweis des Satzes 3.3.1 verfahren und zunächst auf die Identität $F(z) = F(z_1) + (z - z_1)r(z)$ und dann weiter auf die Stetigkeit von r bei z_1 schließen. Dies liefert die zu beweisende Beziehung $F'(z_1) = f(z_1)$. ■

Aufgaben

1. Es geht in dieser Aufgabe um die Frage nach der Existenz von Stammfunktionen für die auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $f(z) := \frac{1}{z}$.

(a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ keine Stammfunktion besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass es zu jedem Punkt der geschlitzten Ebene $\mathbb{C}^-$ eine Umgebung gibt, auf der f eine Stammfunktion besitzt.

(c) Wie steht es mit den Punkten auf der negativen reellen Halbachse?

2. Für ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ und stetiges $f : G \to \mathbb{C}$ zeige man: Gilt $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in G, so ist f in G wegunabhängig integrierbar.

3.4 Der Cauchy'sche Integralsatz

Wir kommen nun zu dem Resultat, das man als das Herz der Funktionentheorie bezeichnen kann. Erst mit seiner Hilfe gelingt es nämlich, die für holomorphe Funktionen spezifischen Ergebnisse herzuleiten, die weit über die elementare Analysis hinausgehen. Entsprechend seiner überragenden Bedeutung tritt dieser so genannte Cauchy'sche Integralsatz in verschiedenen Varianten auf. Wir beginnen mit einer vergleichsweise speziellen Version, die aber dennoch erlaubt, die einschlägigen Ergebnisse der klassischen Funktionentheorie herzuleiten.

Eine allgemeinere Version des Cauchy'schen Integralsatzes wird an späterer Stelle behandelt.

3.4.1 Satz (Cauchy'scher Integralsatz für Sterngebiete): *Ist G ein Sterngebiet in $\mathbb{C}$ und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0 \quad \textit{für jeden geschlossenen Weg } \gamma \textit{ in } G\,.$$

Beweis:[2] Der Beweis erfolgt durch Anwendung des Satzes 3.3.3. Um die dortige Voraussetzung (3.18) zu verifizieren, beweisen wir das folgende Lemma (das im Übrigen nicht auf Sterngebiete beschränkt ist).

3.4.2 Lemma von Goursat: *Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt*

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0 \quad \textit{für jedes Dreieck } \Delta \subset D\,.$$

Beweis des Lemmas: (i) Im ersten Beweisschritt geben wir ein beliebiges Dreieck $\Delta \subset D$ vor und zerlegen es in vier kongruente Teildreiecke $\Delta_1^1, \ldots, \Delta_1^4$, indem wir die Mittelpunkte der drei Seiten von Δ geradlinig miteinander verbinden und die Ränder der vier entstehenden Teildreiecke im gleichen Sinne orientieren (siehe Abbildung). Bildet man dann die Summe $\int_{\partial\Delta_1^1} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\partial\Delta_1^4} f(z)\,dz$, so heben sich die Integrationen über diese inneren Verbindungsstrecken auf, da sie mit unterschiedlicher Richtung durchlaufen werden, und wir erhalten

[2] Wüsste man bereits, dass die Ableitung einer holomorphen Funktion stetig ist, so ließe sich der Satz 3.4.1 leicht mit Hilfe reeller Analysis beweisen (Übungsaufgabe). Da aber die Erkenntnis, dass jede holomorphe Funktion eine holomorphe – und damit stetige – Ableitung besitzt, eines der grundlegenden Ergebnisse ist, die man mit Hilfe des Satzes 3.4.1 beweisen möchte, muss der Beweis ohne die Annahme einer stetigen Ableitung von f geführt werden.

$$\Big|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{4}\int_{\partial\Delta_1^k} f(z)\,dz\Big| \le \sum_{k=1}^{4}\Big|\int_{\partial\Delta_1^k} f(z)\,dz\Big|.$$

Von den Dreiecken $\Delta_1^1, \dots, \Delta_1^4$ wählen wir nun eines, dessen Randintegral maximalen Betrag hat, und bezeichnen es mit Δ_1. Dann gilt

$$\Big|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\Big| \le 4\Big|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\Big| \quad \text{und} \quad L(\partial\Delta_1) = \frac{L(\partial\Delta)}{2}\,.$$

Mit Δ_1 verfahren wir jetzt wie zuvor mit Δ. Dies liefert vier kongruente Dreiecke $\Delta_2^1, \dots, \Delta_2^4$, von denen wir eines mit maximalem Betrag des Randintegrals auswählen und Δ_2 nennen. Hierfür gilt dann

$$\Big|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\Big| \le 4\Big|\int_{\partial\Delta_2} f(z)\,dz\Big| \quad \text{und} \quad L(\partial\Delta_2) = \frac{L(\partial\Delta_1)}{2}\,.$$

So fortfahrend konstruieren wir eine Folge von ineinander geschachtelten Dreiecken $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \dots$ mit

$$\Big|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\Big| \le 4^n\Big|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\Big| \quad \text{und} \quad L(\partial\Delta_n) = \frac{L(\partial\Delta)}{2^n} \tag{3.20}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt z_n im Inneren von Δ_n und erhalten als Grenzwert der so konstruierten Cauchy-Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Punkt $z_0 \in \Delta$ mit $z_0 \in \Delta_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Um im zweiten Beweisschritt zu zeigen, dass die komplexe Zahl $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz$ gleich 0 ist, beschreiben wir die vorausgesetzte Holomorphie der Funktion f mittels der Identität

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + q(z)(z - z_0) \quad \text{für alle } z \in D\,,$$

bei der $q(z)$ im Punkt z_0 stetig ist und dort verschwindet (siehe Satz 2.1.3). Da die lineare Funktion $f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$ eine Stammfunktion in D besitzt, gilt nach Satz 3.3.1

$$\int_{\partial\Delta_n} \big[f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\big]\,dz = 0\,,$$

und damit

$$\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz = \int_{\partial\Delta_n} q(z)(z - z_0)\,dz \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Mit der elementargeometrisch leicht einsichtigen Beziehung $\max_{z\in\partial\Delta_n}|z - z_0| \le L(\partial\Delta_n)$ und der Integralabschätzung (3.10) folgt dann

$$\Big|\int_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\Big| \le L(\partial\Delta_n)\max_{z\in\partial\Delta_n}\big|q(z)\big|\,|z - z_0| \le L(\partial\Delta_n)^2\max_{z\in\partial\Delta_n}\big|q(z)\big|\,.$$

Zusammen mit (3.20) führt dies auf die für alle $n \in \mathbb{N}$ gültige Abschätzung

$$\Big| \int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \Big| \;\leq\; 4^n \Big| \int_{\partial\Delta_n} f(z)\, dz \Big| \;\leq\; L(\partial\Delta) \max_{z \in \partial\Delta_n} |q(z)| \,.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung konvergiert für $n \to \infty$ gegen 0, denn die Funktion q ist an der Stelle z_0 stetig und hat dort den Wert 0, und in jeder noch so kleinen Umgebung von z_0 liegen alle bis auf endlich viele der Dreiecke Δ_n. Damit ist der Beweis des Lemmas von Goursat abgeschlossen. ■

Der Beweis des Cauchy'schen Integralsatzes 3.4.1 für Sterngebiete besteht nun aus einer einfachen Verknüpfung dreier Sätze. Wegen des Lemmas 3.4.2 von Goursat sind die Voraussetzungen des Satzes 3.3.3 erfüllt, und daher gelten die im Satz 3.3.1 formulierten drei Aussagen, von denen eine gerade die Aussage des Cauchy'schen Integralsatzes 3.4.1 ist. ■

Bevor wir den Cauchy'schen Integralsatz anwenden können, müssen wir einer Besonderheit Rechnung tragen, die im (hier gewählten) *Aufbau* der Funktionentheorie begründet ist. Speziell bei der ersten Anwendung im nachfolgenden Satz wird die Voraussetzung, dass f auf einem Sterngebiet G holomorph ist, nur mit Ausnahme eines Punktes von G erfüllt sein. Dass dies jedoch kein ernsthaftes Hindernis ist, sofern f im Ausnahmepunkt wenigstens stetig ist (vgl. jedoch (3.13)), besagt die folgende Bemerkung.

3.4.3 Bemerkung: *Die Aussage des Cauchy'schen Integralsatzes 3.4.1 für Sterngebiete gilt auch unter der abgeschwächten Voraussetzung, dass f in einem Zentrum z_0 von G nicht holomorph, sondern nur stetig ist.*

Zur Begründung dieser Bemerkung genügt es zu zeigen, dass Folgendes gilt:

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \;=\; 0 \quad \text{für jedes Dreieck } \Delta \subset G \text{ mit einer Ecke in } z_0\,. \tag{3.21}$$

Damit folgt die Behauptung nämlich sofort aus den Sätzen 3.3.3 und 3.3.1.

Um (3.21) zu beweisen, betrachten wir ein Dreieck $\Delta \subset G$ mit einer Ecke in z_0 und wählen auf jeder der beiden an z_0 angrenzenden Seiten von Δ einen beliebigen Punkt. Für die gemäß der Abbildung gebildeten Dreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ gilt dann

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\, dz \;=\; \int_{\partial\Delta_1} f(z)\, dz \;+ \int_{\partial\Delta_2} f(z)\, dz \;+ \int_{\partial\Delta_3} f(z)\, dz \,,$$

denn die Integrale über die Strecken im Inneren von Δ heben sich gegenseitig auf. Nach dem Lemma 3.4.2 von Goursat, angewandt auf das Gebiet $G \setminus \{z_0\}$, verschwinden die letzten beiden Integrale, und wir erhalten

$$\Big|\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz\Big| \;=\; \Big|\int_{\partial\Delta_1} f(z)\,dz\Big| \overset{(3.10)}{\leq} L(\partial\Delta_1)\,\max_{z\in\partial\Delta_1}\big|f(z)\big|\,.$$

Da sich das Dreieck $\partial\Delta_1$ – und damit $L(\partial\Delta_1)$ – beliebig klein machen lässt, indem man die von z_0 verschiedenen Ecken von $\partial\Delta_1$ hinreichend nahe bei z_0 wählt, folgt $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$. Damit ist die Bemerkung 3.4.3 begründet.

Wenn man den Cauchy'schen Integralsatz als das „Herz" der Funktionentheorie bezeichnet, so beschreibt der nun folgende Satz das „Blut", mit dessen Hilfe die im Integralsatz enthaltene Information in den „Körper" der Funktionentheorie transportiert wird.

3.4.4 Satz (Cauchy'sche Integralformel für Kreisscheiben): *Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $U_r(a)$ eine Kreisscheibe mit $\overline{U_r(a)} \subset D$. Dann gilt die so genannte* ***Cauchy'sche Integralformel***

$$f(z) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad \text{für alle } z \in U_r(a)\,. \tag{3.22}$$

Das Bemerkenswerte an der Formel (3.22) ist, dass man mit ihrer Hilfe die Funktion f auf der gesamten Kreisscheibe $U_r(a)$ beschreiben kann, obwohl das Integral die Funktion f nur am Rand von $U_r(a)$ auswertet. Mit anderen Worten: Die Funktionswerte von f am Rand der Kreisscheibe $U_r(a)$ legen die Funktionswerte in gesamten Inneren fest. Dies ist (neben den Cauchy-Riemann'schen Differenzialgleichungen) eine zweite Erscheinungsform der „Starrheit" holomorpher Funktionen.

Beweis von Satz 3.4.4: Die Formel (3.22) ergibt sich – für festes $z \in U_r(a)$ – aus einer einfachen Anwendung des Cauchy'schen Integralsatzes auf die Funktion

$$g(\zeta) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{für } \zeta \in D \setminus \{z\}\,, \\ f'(z) & \text{für } \zeta = z\,. \end{cases}$$

Da D von Haus aus kein Sterngebiet ist, betrachten wir die Einschränkung der Funktion $g : D \to \mathbb{C}$ auf eine Kreisscheibe $U_s(a)$ mit $\overline{U_r(a)} \subset U_s(a) \subseteq D$. Da die Einschränkung $g|_{U_s(a)}$ auf $U_s(a) \setminus \{z\}$ holomorph und im Punkt z stetig ist, liefert der Cauchy'sche Integralsatz 3.4.1 in Verbindung mit der Bemerkung 3.4.3 die Beziehung

$$0 \;=\; \int_{S_r(a)} g(\zeta)\,d\zeta \;=\; \int_{S_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \;-\; f(z)\int_{S_r(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}\,.$$

Nach Satz 3.2.8 ist das ganz rechts stehende Integral gleich $2\pi i$, und der Beweis ist beendet. ∎

Als unmittelbare Folge der Cauchy'schen Integralformel ergibt sich die Möglichkeit, den Wert einer holomorphen Funktion an einer Stelle a durch die Werte auf einem Kreis um a im Sinne einer „Mittelwertbildung“ zu berechnen.

3.4.5 Folgerung: *Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, so gilt für jeden Punkt $a \in D$ die so genannte* ***Mittelwertgleichung***

$$f(a) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + r\,e^{it})\,dt \quad \text{für jedes } r > 0 \text{ mit } \overline{U_r(a)} \subset D. \qquad (3.23)$$

Begründung: Für $z := a$ in (3.22) folgt

$$f(a) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{S_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\,d\zeta \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a + r\,e^{it})}{r\,e^{it}}\, i\,r\,e^{it}\,dt\,.$$ ∎

Aufgaben

1. Berechnen Sie für ein $r > 0$ das reelle Integral $\int_0^{2\pi} e^{r\cos\varphi}\cos(\varphi + r\sin\varphi)\,d\varphi$, indem Sie für die komplexe Funktion e^z ein geeignetes Kurvenintegral auswerten.
2. Zeigen Sie: Ist Δ ein offenes Dreieck in $\mathbb{C}$, so gilt $\int_{\partial\Delta}\frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i$ für alle $z \in \Delta$.
   Hinweis: Experimentieren Sie mit Integrationswegen.
3. Berechnen Sie die Integrale
   $$\int\limits_{S_2(0)} \frac{\sin z}{z+i}\,dz\,, \quad \int\limits_{S_2(0)} \frac{e^z}{(z+1)(z-3)^2}\,dz\,, \quad \int\limits_{S_2(-2i)} \frac{dz}{z^2+1}\,, \quad \int\limits_{S_1(0)} \frac{e^z}{(z-2)^3}\,dz\,.$$
4. Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $U_r(a)$ eine Umgebung mit $\overline{U_r(a)} \subset D$. Zeigen Sie:
   (a) Es gilt $|f(a)| \le \max\limits_{z \in S_r(a)} |f(z)|$.
   (b) Es gilt sogar $|f(z)| \le \max\limits_{z \in S_r(a)} |f(z)|$ für alle $z \in U_r(a)$.
   Hinweis zu (b): Betrachten Sie neben $f(z)$ auch die Potenzen $f(z)^k$, $k \in \mathbb{N}$.

4 Eigenschaften holomorpher Funktionen

Nachdem uns nun die Grundlagen der komplexen Differenzial- und Integralrechnung zur Verfügung stehen, können wir darangehen, den bislang nur angedachten, für die Funktionentheorie aber zentralen Begriff der holomorphen Funktion in seiner ganzen Tragweite zu erfassen. Wir werden dabei eine Reihe bemerkenswerter Resultate herleiten, die weit über die aus der reellen Analysis bekannten Sachverhalte hinausgehen, auf der anderen Seite aber interessante und nützliche Rückschlüsse auf Ergebnisse und Rechentechniken der reellen Analysis zulassen.

4.1 Entwicklung in Potenzreihen

In der reellen Analysis kennt man unendlich viele Abstufungen für die Glattheit von Funktionen: C^1, C^2, ... usw. Und selbst für C^∞-Funktionen gibt es noch eine Steigerung, nämlich die reell analytischen Funktionen; das sind diejenigen, die sich um jeden Punkt ihres Definitionsbereichs in ihre Taylor-Reihe entwickeln lassen, die zudem lokal gegen die gegebene Funktion konvergiert.

Unser erstes Resultat über holomorphe Funktionen besagt, dass jede holomorphe, also nur *einmal* komplex differenzierbare, Funktion bereits diese höchste Form von Glattheit besitzt, nämlich die Entwickelbarkeit in ihre Taylor-Reihe.

4.1.1 Satz (über die Entwicklung holomorpher Funktionen in Potenzreihen): *Jede holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ lässt sich um jeden Punkt $a \in D$ in eine konvergente Potenzreihe $\sum_{k=0}^\infty c_k(z-a)^k$ entwickeln. Die Koeffizienten c_k sind eindeutig bestimmt, besitzen die Darstellungen*

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}}\, d\zeta \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0\,, \tag{4.1}$$

und der (von a abhängige) Konvergenzradius ist im Fall $D \neq \mathbb{C}$ die größte Zahl r mit $U_r(a) \subseteq D$, und im Fall $D = \mathbb{C}$ ist er gleich ∞.

Beweis: Wir wählen eine beliebige Kreisscheibe $U_r(a)$ mit $\overline{U_r(a)} \subseteq D$ und verfahren mit der Cauchy'schen Integralformel (3.22) nach dem Muster des Beweises von Satz 3.2.8. Zu diesem Zwecke erinnern wir an die dort als (3.14) auftretende Identität

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{z-a}{\zeta - a}\Big)^k \quad \text{für alle } z \in U_r(a)\,,$$

bei der die Reihe als Funktion von $\zeta \in S_r(a)$ gleichmäßig konvergiert. Damit gilt für jedes $z \in U_r(a)$ die Beziehung

$$\begin{aligned} f(z) &\overset{(3.22)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r(a)} \Big[\frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\frac{z-a}{\zeta-a}\Big)^k\Big]\, d\zeta \\ &\overset{3.2.5}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}}\, d\zeta\Big]\, (z-a)^k\,, \end{aligned}$$

und das bedeutet, dass die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$, deren Koeffizienten die in (4.1) angegebene Integraldarstellung besitzen, in $U_r(a)$ gegen die Funktion $f(z)$ konvergiert. Ferner gilt, dass der Konvergenzradius dieser Reihe mindestens so groß ist wie r, und daher größtmöglich im Sinne der Aussage des Satzes.

Die restlichen Aussagen des Satzes ergeben sich aus Korollar 2.3.3, denn danach haben die Koeffizienten c_k notwendigerweise die Form $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. ∎

Der Satz 4.1.1 liefert in Verbindung mit Satz 2.3.1 Folgendes:

4.1.2 Folgerung: *Die Ableitung jeder holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ ist holomorph. Mehr noch, es existieren alle Ableitungen $f^{(n)} : D \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, und sind holomorph.*

Die Frage, ob es auch für die höheren Ableitungen eine der Cauchy'schen Integralformel (3.22) entsprechende Formel gibt, beantwortet der folgende Satz, in dem die bisherige Formel (3.22) als Spezialfall ($n = 0$) enthalten ist.

4.1.3 Satz (Cauchy'sche Integralformel für Ableitungen): *Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, und $U_r(a)$ sei eine Kreisscheibe mit $\overline{U_r(a)} \subset D$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die* ***Cauchy'sche Integralformel***

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{S_r(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \quad \text{für alle } z \in U_r(a)\,. \tag{4.2}$$

Beweis: Die einfache Idee des Beweises ist, die Ableitung $f^{(n)}(z)$ als Potenzreihe mit Koeffizienten in Integralform zu schreiben und dann Reihensumme und Integral zu vertauschen. Um dies zu realisieren, wenden wir das Korollar 2.3.3 auf die nach Satz 4.1.1 gültige Potenzreihendarstellung $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$ an und erhalten $f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} c_k (z-a)^{k-n}$. Unter Beachtung der Integraldarstellung (4.1) der c_k erhalten wir also

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \Big[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\, d\zeta \Big] (z-a)^{k-n} \tag{4.3}$$

für alle $z \in U_r(a)$. Um in diesem Ausdruck Summe und Integral zu vertauschen, stellen wir zunächst eine Identität bereit, die sich durch Anwendung von Korollar 2.3.3 auf die Funktion $\frac{1}{1-w} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k$ ergibt:

$$\frac{n!}{(1-w)^{n+1}} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!}\, w^{k-n} \quad \text{für alle } w \in U_1(0)\,. \tag{4.4}$$

Damit gilt dann für alle $z \in U_r(a)$ und $\zeta \in S_r(a)$ (und folglich $|\frac{z-a}{\zeta-a}| < 1$)

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \frac{(z-a)^{k-n}}{(\zeta-a)^{k+1}} &= \frac{1}{(\zeta-a)^{n+1}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \Big(\frac{z-a}{\zeta-a}\Big)^{k-n} = \\ \overset{(4.4)}{=} \frac{1}{(\zeta-a)^{n+1}} \frac{n!}{\big(1-\frac{z-a}{\zeta-a}\big)^{n+1}} &= \frac{n!}{(\zeta-z)^{n+1}}\,. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dass die hierbei auftretenden Reihen (bei festen a und z) als Funktionen von $\zeta \in S_r(a)$ gleichmäßig konvergieren, erkennt man, indem man ein $s \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $|z-a| < s < r$ wählt und die gemäß (4.4) konvergente Zahlenreihe $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} (\frac{s}{r})^{k-n}$ als Majorante zur Anwendung des Weierstraß-Kriteriums einsetzt. Damit können wir dann in (4.3) Summe und Integral vertauschen, und wir erhalten die für alle $z \in U_r(a)$ gültige Identität

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_r(a)} f(\zeta) \Big[\sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} \frac{(z-a)^{k-n}}{(\zeta-a)^{k+1}} \Big] d\zeta \overset{(4.5)}{=} \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{S_r(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\, d\zeta\,,$$

die den Beweis des Satzes 4.1.3 zum Abschluss bringt. ■

Mehr noch als ihr Spezialfall (3.22) hat die allgemeine Cauchy'sche Integralformel (4.2) die bemerkenswerte Eigenschaft, dass man mit ihrer Hilfe aus der Kenntnis der Funktion $f(z)$ am Rand der Kreisscheibe $U_r(a)$ auf das Verhalten *aller* Ableitungen im *gesamten* Inneren dieser Kreisscheibe schließen kann.

Umgekehrt kann man die Formel (4.2) aber auch dazu benutzen, Integrale von Funktionen der Bauart, wie sie im Integranden von (4.2) auftreten, einfach dadurch zu berechnen, dass man eine geeignete Funktion an einer einzigen Stelle auswertet. Zu diesem Zwecke ist es sinnvoll, die Formel (4.2) für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $b \in U_r(a)$ wie folgt umzuschreiben:

$$\boxed{\int_{S_r(a)} \frac{f(z)}{(z-b)^n}\,dz \;=\; \frac{2\pi i}{(n-1)!}\,f^{(n-1)}(b)} \tag{4.6}$$

4.1.4 Beispiel: Um das Integral

$$\int_{S_1(0)} \frac{e^{\sin z}}{z^3}\,dz$$

zu berechnen, braucht man gemäß der Formel (4.6) lediglich die zweite Ableitung der Funktion $f(z) := e^{\sin z}$ zu berechnen. Wegen $f'(z) = e^{\sin z}\cos z$ gilt $f''(z) = e^{\sin z}(\cos^2 z - \sin z)$, und folglich hat das Integral den Wert $\pi i\, f''(0) = \pi i$. ◊

Im theoretischen Gebrauch wird die Cauchy'sche Integralformel (4.2) häufig nicht unmittelbar eingesetzt, sondern indirekt in Form von Abschätzungen, die sich aus ihr ergeben.

4.1.5 Satz (Cauchy'sche Abschätzungen): *Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, und $U_r(a)$ sei eine Kreisscheibe mit $\overline{U_r(a)} \subset D$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jedes s mit $0 < s < r$*

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{r\,n!}{s^{n+1}} \max_{\zeta \in S_r(a)} \left|f(\zeta)\right| \quad \text{für alle } z \in \overline{U_{r-s}(a)}\,. \tag{4.7}$$

Ferner gilt

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \le \frac{n!}{r^n} \max_{\zeta \in S_r(a)} \left|f(\zeta)\right| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0\,. \tag{4.8}$$

Beide Abschätzungen nennt man ***Cauchy'sche Abschätzungen****.*

Beweis: Wenden wir auf die nach Satz 4.1.3 gültige Identität

$$f^{(n)}(z) \;=\; \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{S_r(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta \quad \text{für alle } z \in U_r(a)$$

die Integralabschätzung (3.10) an und beachten, dass für jedes $z \in \overline{U_{r-s}(a)}$ und $\zeta \in S_r(a)$ die Ungleichung $|\zeta - z| \ge s$ gilt, so erhalten wir (4.7) wie folgt:

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \overset{(3.10)}{\le} \frac{n!}{2\pi}\, L\big(S_r(a)\big) \max_{\zeta \in S_r(a)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^{n+1}} \;\le\; \frac{r\,n!}{s^{n+1}} \max_{\zeta \in S_r(a)} \left|f(\zeta)\right|.$$

Betrachtet man in dieser Ungleichung nur $z := a$, so gilt sie für jedes positive $s < r$, und der Grenzübergang $s \to r$ liefert die Abschätzung (4.8). ■

An den Cauchy'schen Abschätzungen (4.7) und (4.8) ist bemerkenswert, dass die Konstanten $\frac{r\,n!}{s^{n+1}}$ und $\frac{n!}{r^n}$ nur von der Differenziationsordnung n und der Geometrie der betrachteten Umgebungen abhängen, nicht aber von der Funktion f. Diese „Gleichmäßigkeit“ bezüglich der Klasse holomorpher Funktionen sehen wir erneut in einem etwas allgemeineren Kontext im folgenden Satz.

4.1.6 Satz (Cauchy'sche Abschätzungen in kompakten Mengen): *Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $K \subset D$ kompakt. Dann gibt es zu jeder kompakten Umgebung $L \subset D$ von K und jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $M = M(L,n) > 0$ mit folgender Eigenschaft:*

$$\max_{z\in K} \left|f^{(n)}(z)\right| \leq M \max_{\zeta\in L} \left|f(\zeta)\right| \quad \textit{für alle holomorphen } f : D \to \mathbb{C}\,.$$

Dass man in diesem Satz L als (kompakte) Umgebung von K wählen muss, und die Wahl $L = K$ nicht ausreicht, zeigt die Klasse holomorpher Funktionen $f_k(z) := z^k$, $k \in \mathbb{N}$, auf der Menge $K := \overline{U_1(0)}$. Hier gilt nämlich $\max\limits_{\zeta\in K} |f_k(\zeta)| = 1$ und $\max\limits_{z\in K} |f_k'(z)| = k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Beweis von Satz 4.1.6: Wir fixieren $n \in \mathbb{N}$ und wählen zu jedem Punkt $a \in K$ ein $r(a) > 0$, sodass die Kreisscheibe $U_{r(a)}(a)$ ganz in L liegt. Nach Satz 4.1.5 gibt es dann ein $m = m(n,a) > 0$, sodass für alle $z \in U_{r(a)}(a)$ die Abschätzung

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq m \max_{\zeta\in L} \left|f(\zeta)\right| \quad \text{für alle holomorphen } f : D \to \mathbb{C}$$

gilt. Wegen der Kompaktheit von K genügen endliche viele dieser Kreisscheiben, etwa $U_{r(a_1)}(a_1), \ldots, U_{r(a_m)}(a_m)$, zur Überdeckung von K, und wir erhalten, wenn wir M als Maximum der Konstanten $m(n,a_1), \ldots, m(n,a_m)$ wählen, für alle $z \in K$

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq M \max_{\zeta\in L} \left|f(\zeta)\right| \quad \text{für alle holomorphen } f : D \to \mathbb{C}\,,$$

und daraus die zu beweisende Aussage. ■

Bevor wir den Abschnitt beschließen, in dem wir unter anderem gezeigt haben, dass die Ableitung einer holomorphen Funktion selbst wieder holomorph ist, wollen wir als erste Folgerung aus dieser Tatsache zeigen, dass der Cauchy'sche Integralsatz eine Umkehrung besitzt, und zwar nicht nur in Sterngebieten, sondern in beliebigen offenen Mengen.

4.1.7 Satz (von Morera): *Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ stetig. Gilt dann $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ für jeden in D geschlossenen Weg γ, so ist f holomorph.*

Beweis: Da die Beziehung $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ insbesondere für jeden in einer beliebigen Kreisscheibe $U_r(a) \subseteq D$ geschlossenen Weg γ gilt, besitzt f nach Satz 3.3.1 eine Stammfunktion in $U_r(a)$. Als Ableitung dieser Stammfunktion ist f dann nach Folgerung 4.1.2 in $U_r(a)$ holomorph. ■

Wir haben den Satz von Morera als Umkehrung des Cauchy'schen Integralsatzes 3.4.1 bezeichnet, da er den im Satz 3.4.1 beschriebenen Schluss von der Holomorphie einer Funktion auf das Verschwinden aller Integrale längs geschlossener Wege umkehrt. Bei dieser Betrachtungsweise ist jedoch Vorsicht geboten, denn während der Satz von Morera auf beliebigen offenen Mengen gilt, wird im Cauchy'schen Integralsatz (in der Fassung 3.4.1) ein Sterngebiet vorausgesetzt. Wir wissen ja bereits (Beispiel 3.2.1), dass es in Nicht-Sterngebieten Integrale über geschlossene Wege gibt, die nicht verschwinden. Mit anderen Worten: In beliebigen offenen Mengen ist das Verschwinden der Integrale über geschlossene Wege nach dem Satz von Morera zwar hinreichend, aber nicht notwendig für die Holomorphie der betrachteten Funktion.

Bedingungen, die in beliebigen offenen Mengen notwendig und hinreichend für Holomorphie sind, beschreiben wir im nächsten Abschnitt.

Aufgaben

1. Zeigen Sie: Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $U_r(a)$ eine Kreisscheibe mit $\overline{U_r(a)} \subset D$, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{rn!}{m(z)^{n+1}} \max_{\zeta \in S_r(a)} |f(\zeta)| \quad \text{für alle } z \in U_r(a)\,,\ \text{wobei } m(z) := \min_{\zeta \in S_r(a)} |\zeta - z|\,.$$

Inwiefern ist dies eine Verallgemeinerung der in der Vorlesung bewiesenen Cauchy'schen Abschätzung?

2. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{S_1(0)} \frac{e^{3z}}{z^4}\,dz\,,\quad \int_{S_2(0)} \frac{z^3}{z^2 - 2z + 2}\,dz\,,\quad \int_{S_2(0)} \frac{e^z}{\pi i - 2z}\,dz\,.$$

3. Berechnen Sie für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Integrale

$$\int_{S_2(0)} \frac{z^m}{(1-z)^n}\,dz\,.$$

Für welche m und n verschwindet das Integral?

4.2 Kriterien für Holomorphie

Wegen der fundamentalen Bedeutung der Holomorphie für die Funktionentheorie ist es wichtig, verschiedene Möglichkeiten zur Beschreibung dieses Begriffs zur Verfügung zu haben. Diejenigen, die sich fast unmittelbar aus unseren bisherigen Überlegungen ergeben, fassen wir in folgendem Satz zusammen.

4.2.1 Satz (Äquivalente Bedingungen für Holomorphie): *Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, und $f : D \to \mathbb{C}$ sei stetig. Dann sind äquivalent:*

(a) *f ist holomorph in D.*

(b) *Für jedes kompakte Dreieck $\Delta \subset D$ gilt $\int_{\partial\Delta} f(\zeta)\,d\zeta = 0$.*

(c) *Zu jedem Punkt $a \in D$ gibt es eine Kreisscheibe $U_r(a) \subseteq D$, auf der f eine Stammfunktion besitzt.*

(d) *Für jede Kreisscheibe $U_r(a)$ mit $\overline{U_r(a)} \subset D$ gilt die Cauchy'sche Integralformel (3.22).*

(e) *f ist um jeden Punkt von D in eine konvergente Potenzreihe entwickelbar.*

Beweis: Im Wesentlichen durch Zitieren geeigneter Sätze begründen wir die beiden Implikationsketten $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$ und $(a) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) \Rightarrow (a)$, was offensichtlich die Äquivalenz aller fünf Aussagen beweist.

$\underline{(a) \Rightarrow (b)}$: Lemma 3.4.2 von Goursat.

$\underline{(b) \Rightarrow (c)}$: Satz 3.3.3, angewandt auf eine Umgebung $U_r(a) \subseteq D$.

$\underline{(c) \Rightarrow (a)}$: Folgerung 4.1.2 angewandt auf eine Stammfunktion von f.

$\underline{(a) \Rightarrow (d)}$: Satz 3.4.4 über die Cauchy'sche Integralformel.

$\underline{(d) \Rightarrow (e)}$: Beweis von Satz 4.1.1.

$\underline{(e) \Rightarrow (a)}$: Satz 2.3.1. ■

Als erste Anwendung des Satzes 4.2.1 klären wir nun die Frage, unter welchen Voraussetzungen eine Folge holomorpher Funktionen eine holomorphe Grenzfunktion besitzt. Wir erinnern in diesem Zusammenhang an die etwa eigenartige Situation in der reellen Analysis, wo bei der entsprechenden Frage bezüglich Stetigkeit und Riemann-Integrierbarkeit die gleichmäßige (es genügt die kompakte) Konvergenz der Funktionenfolge vonnöten ist, während dies bei der Differenzierbarkeit nicht ausreicht. Dort muss bekanntlich die Folge der Ableitungen gleichmäßig (bzw. kompakt) konvergieren, und die Folge der Funktionen selbst muss an wenigstens einer Stelle konvergieren.

Dass im komplexen Kontext die Differenzierbarkeit im Reigen dieser Konvergenzresultate nicht mehr aus der Reihe tanzt, besagt der folgende Satz.

4.2.2 Satz (über kompakt konvergente Folgen): *Es sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge holomorpher Funktionen* $f_n : D \to \mathbb{C}$, *die kompakt gegen eine Funktion* $f : D \to \mathbb{C}$ *konvergiert. Dann ist auch* f *holomorph, und für jedes* $m \in \mathbb{N}$ *konvergiert die Folge* $(f_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$ *kompakt gegen* $f^{(m)}$.

Beweis: Da f als Grenzfunktion einer kompakt konvergenten Folge stetiger Funktionen bekanntlich stetig ist, gilt nach Satz 3.2.4

$$\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz \quad \text{für jedes Dreieck } \Delta\subset D$$

(beachte, dass $\partial\Delta$ kompakt ist). Da die Integrale auf der rechten Seite nach dem Lemma 3.4.2 von Goursat verschwinden, ist auch das Integral auf der linken Seite 0, und die Holomorphie folgt aus Satz 4.2.1 (Äquivalenz von (a) und (b)).

Für die Aussage bezüglich der Folgen $(f_n^{(m)})_{n\in\mathbb{N}}$ genügt es, den Fall $m = 1$ zu betrachten, und mit dem ersten Teil des Beweises genügt es dann zu zeigen, dass die Folge $(f_n' - f')_{n\in\mathbb{N}}$ kompakt gegen die Nullfunktion konvergiert. Zum Zwecke dieses Nachweises wählen wir eine beliebige kompakte Menge $K \subset D$. Ferner wählen wir eine kompakte Umgebung $L \subset D$ von K und schließen mit Hilfe des Satzes 4.1.6 auf die Existenz einer Konstante M mit der Eigenschaft

$$\max_{z\in K}\bigl|f_n'(z)-f'(z)\bigr| \;\le\; M\,\max_{\zeta\in L}\bigl|f_n(\zeta)-f(\zeta)\bigr| \quad \text{für alle } n\in\mathbb{N}\,.$$

Da die rechte Seite – wie im ersten Beweisschritt gezeigt – für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert, tut dies auch die linke und der Beweis ist abgeschlossen. ■

Der Satz 4.2.2 besitzt natürlich eine Reihenversion, deren Beweis sich erübrigt.

4.2.3 Satz (über kompakt konvergente Reihen): *Es sei* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ *eine Reihe holomorpher Funktionen* $f_k : D \to \mathbb{C}$, *die kompakt gegen eine Funktion* $f : D \to \mathbb{C}$ *konvergiert. Dann ist auch* f *holomorph, und für jedes* $m \in \mathbb{N}$ *konvergiert die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(m)}$ *kompakt gegen* $f^{(m)}$.

Als Anwendung des Satzes 4.2.3 betrachten wir eine der berühmtesten Funktionen der Mathematik. Sie vollständig zu verstehen, ist bis zum heutigen Tage noch nicht gelungen.

4.2.4 Beispiel: Für jede natürliche Zahl n ist die komplexe Potenz n^z für alle $z \in \mathbb{C}$ erklärt, nämlich als $\exp(z \ln n)$. Damit kann man die als **Riemann'sche Zetafunktion** bezeichnete Funktion

$$\zeta(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$$

ins Auge fassen und zunächst fragen, für welche komplexen z diese Funktion definiert, stetig oder holomorph ist. Für reelle z ist die Antwort aus der elementaren Analysis bekannt: Die Reihe konvergiert genau für die $z > 1$. Dass die Reihe auch für die komplexen z mit $\operatorname{Re} z > 1$ definiert ist und auf der damit definierten Halbebene eine holomorphe Funktion darstellt, soll in einer Übungsaufgabe gezeigt werden.

Nicht gezeigt werden soll (oder doch!?), dass alle Nullstellen dieser Funktion auf der Geraden mit Realteil $\frac{1}{2}$ liegen. Diese von Bernhard Riemann im Jahre 1859 geäußerte Vermutung, die so genannte **Riemann'sche Vermutung**, ist bis heute – trotz unzähliger Versuche – weder widerlegt noch bewiesen. Für ihre Lösung ist mittlerweile ein Preisgeld von 1 Million US Dollar ausgesetzt. $\diamondsuit$

Aufgaben

1. Für die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z}$, deren Grenzfunktion man als Riemann'sche Zetafunktion bezeichnet, zeige man:

(a) Sie konvergiert gleichmäßig in jeder Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 1 + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$.
(b) Sie konvergiert kompakt in der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$.
(c) Ihre Grenzfunktion ist in der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ holomorph.
(d) Alle Nullstellen der Grenzfunktion liegen auf der Geraden $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\}$.

Hinweis zu (d): Dieser Teil ist nur für besonders ambitionierte Studierende gedacht. Für die vollständige Lösung dieser Teilaufgabe hat das *Clay Mathematics Institute*, `www.claymath.org`, ein Preisgeld in Höhe von 1 Million US Dollar ausgesetzt.

4.3 Fortsetzung holomorpher Funktionen

In diesem Abschnitt stellen wir zwei Sätze vor, die erneut die „Starrheit“ holomorpher Funktionen demonstrieren. Im einen Fall geht es darum, dass holomorphe Funktionen in der Lage sind, gewisse Defekte auf Mengen *ohne* Häufungspunkte von selbst zu beheben, während ihre Vorgabe auf Mengen *mit* Häufungspunkten bereits die Funktion als Ganzes festlegen.

Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ und eine abgeschlossene Teilmenge A von D. Wir nennen dann eine holomorphe Funktion $f : D\setminus A \to \mathbb{C}$ **stetig fortsetzbar** bzw. **holomorph fortsetzbar** nach A, wenn es eine stetige bzw. holomorphe Funktion $\widetilde{f} : D \to \mathbb{C}$ gibt, deren Einschränkung auf $D \setminus A$ mit f übereinstimmt.

Ferner erinnern wir daran, dass man einen Punkt b einer Menge $B \subseteq \mathbb{C}$ einen **isolierten Punkt** von B nennt, wenn es eine Kreisscheibe $U_r(b)$ gibt mit $U_r(b) \cap B = \{b\}$. Die Menge B nennt man **diskret**, wenn alle ihre Punkte isolierte Punkte von B sind.

Im folgenden Satz ist von einer diskreten, abgeschlossenen Teilmenge A einer offenen Menge D die Rede. In diesem Fall kann A keinen Häufungspunkt in D besitzen, Häufungspunkte am Rand von D sind jedoch möglich.

4.3.1 Satz (Fortsetzungssatz): *Es sei A eine diskrete und abgeschlossene Teilmenge einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{C}$, und $f : D \setminus A \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *f ist nach A holomorph fortsetzbar.*

(b) *f ist nach A stetig fortsetzbar.*

(c) *Zu jedem Punkt $a \in A$ gibt es eine punktierte Umgebung $\dot{U}_r(a) \subseteq D$, in der f beschränkt ist.*

(d) *Es gilt $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$ für jeden Punkt $a \in A$.*

Beweis: Nachdem $(a) \Rightarrow (b)$ trivial ist, und die Implikationen $(b) \Rightarrow (c)$ und $(c) \Rightarrow (d)$ offensichtlich zutreffen, bleibt nur noch $(d) \Rightarrow (a)$ zu verifizieren.

Es gelte also die Aussage (d). Da A diskret ist, genügt es zur Verifikation der Aussage (a), die holomorphe Fortsetzbarkeit von f in einem einzigen Punkt $a \in A$ zu beweisen. Hierzu wählen wir eine Kreisscheibe $U_r(a) \subseteq D$, die neben a keinen weiteren Punkt von A enthält, und betrachten die in $U_r(a)$ definierte Hilfsfunktion

$$h(z) := \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & \text{für } z \in \dot{U}_r(a)\,, \\ 0 & \text{für } z = a\,. \end{cases}$$

Um zunächst zu zeigen, dass die in $\dot{U}_r(a)$ offensichtlich holomorphe Funktion h auch im Punkt a differenzierbar ist, schreiben wir $h(z)$ in $U_r(a)$ in der Form

$$h(z) = h(a) + (z-a)\,q(z) \quad \text{mit} \;\; q(z) := (z-a)\,f(z)\,.$$

Nach Voraussetzung (d) ist q im Punkt a stetig, und so ist h nach Satz 2.1.3 im Punkt a differenzierbar, und besitzt die Ableitung $h'(a) = q(a) = 0$. Damit ist h auf ganz $U_r(a)$ holomorph.

Nach Satz 4.1.1 ist h auf $U_r(a)$ als Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k$ darstellbar, die man wegen $h(a) = h'(a) = 0$ auch in der Form

$$h(z) = \sum_{k=2}^{\infty} c_k(z-a)^k = (z-a)^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(z-a)^k$$

schreiben kann. Damit ist nun ersichtlich, dass die auf $U_r(a)$ definierte Funktion $\widetilde{f}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+2}(z-a)^k$ auf der punktierten Umgebung $\dot{U}_r(a)$ mit der Funktion $h(z)/(z-a)^2 = f(z)$ übereinstimmt und folglich f nach a holomorph fortsetzt. ■

In der Rückschau auf das mit der Bemerkung 3.4.3 behobene Problem, dass bei der Herleitung der Cauchy'schen Integralformel aus dem Cauchy'schen Integralsatz die betrachtete Funktion an einer Stelle nicht holomorph, sondern nur stetig ist, erkennen wir im Lichte das Satzes 4.3.1, dass es sich hierbei um keine tatsächliche, sondern lediglich um eine im axiomatischen Aufbau dieser Vorlesung begründete scheinbare Abschwächung der Voraussetzung handelt.

4.3.2 Beispiel: Dass der Satz 4.3.1 für reelle C^∞-Funktionen nicht gilt, sehen wir am Beispiel der im Punkt 0 zwar stetig, aber nicht reell-analytisch ergänzbaren Funktion $\exp(-1/x^2)$. Entwickelt man nämlich die Taylorreihe der fortgesetzten Funktion um 0, so verschwinden alle Koeffizienten. ◊

Wir ändern nun die Sichtweise dahin gehend, dass wir jetzt nicht mehr eine holomorphe Funktion von einer „dicken“ (offenen) Menge auf eine sehr „dünne“ (diskrete) Menge fortsetzen, sondern umgekehrt von einer „dünnen“ (abzählbaren) Menge (allerdings mit Häufungspunkt) auf eine „dicke“ (offene) Menge. Dass hierbei der Zusammenhang des Definitionsbereich der betrachteten Funktion vonnöten ist, werden wir gleich anhand eines Beispiels sehen.

4.3.3 Satz (Identitätssatz): *Für zwei auf eine Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen $f, g : G \to \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *Es gilt $f(z) = g(z)$ für alle $z \in G$.*

(b) *Die Menge $\{z \in G : f(z) = g(z)\}$ hat einen Häufungspunkt in G.*

(c) *Es gibt einen Punkt $a \in G$ mit $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Als Identitätssatz im engeren Sinne versteht man die Implikation $(b) \Rightarrow (a)$, die besagt, dass schon das Übereinstimmen zweier auf G holomorpher Funktionen auf einer Teilmenge A mit Häufungspunkt in G (nicht am Rande!) ausreicht, die Übereinstimmung auf ganz G zu sichern. Einen Spezialfall dieses Sachverhalts haben wir bereits in der Cauchy'schen Integralformel (3.22) kennen gelernt, bei der die Kreislinie $S_r(a)$ die Rolle von A spielt. Dem Fall, dass A ein Intervall der reellen Achse ist, werden wir uns am Ende dieses Abschnitts zuwenden.

4.3.4 Beispiel: Dass im Satz 4.3.3 auf den Zusammenhang von G nicht verzichtet werden kann, zeigt schon das Beispiel der beiden auf $D := U_1(0) \cup U_1(2)$ holomorphen Funktionen

$$f(z) := 0\,, \quad g(z) := \begin{cases} 0 & \text{für } z \in U_1(0)\,, \\ 1 & \text{für } z \in U_1(2)\,. \end{cases}$$

Die beiden Aussagen (b) und (c) des Satzes 4.3.3 sind erfüllt, nicht aber (a). $\Diamond$

Beweis des Satzes 4.3.3: Da die Implikation $(a) \Rightarrow (b)$ trivial ist, genügt der Nachweis der Implikationen $(b) \Rightarrow (c)$ und $(c) \Rightarrow (a)$.

<u>$(b) \Rightarrow (c)$</u>: Wir betrachten die auf G erklärte Funktion $h(z) := f(z) - g(z)$ und folgern aus der Voraussetzung (b), dass ihre Nullstellenmenge $\{z \in \mathbb{C} : h(z) = 0\}$ einen Häufungspunkt $a \in G$ besitzt. Um für diesen Punkt die Aussage (c) zu beweisen, machen wir die Widerspruchsannahme, dass es ein $m \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $h^{(m)}(a) \neq 0$. Dabei können wir annehmen, dass m die kleinste Zahl in $\mathbb{N}_0$ mit dieser Eigenschaft ist. Folglich besitzt h in einer Umgebung $U_r(a) \subseteq G$ nach Satz 4.1.1 die Darstellung

$$h(z) = (z-a)^m\, q(z) \quad \text{mit} \quad q(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{h^{(k)}(a)}{k!}\,(z-a)^{k-m}\,. \tag{4.9}$$

Wegen $q(a) = \frac{h^{(m)}(a)}{m!} \neq 0$ und der Stetigkeit von q in $U_r(a)$ gibt es eine Umgebung $U_s(a) \subseteq U_r(a)$, in der q keine Nullstelle besitzt. Auf Grund der Darstellung (4.9) besitzt dann h in $U_s(a)$ nur die Nullstelle a. Dies widerspricht der Eigenschaft von a, ein Häufungspunkt von Nullstellen der Funktion h zu sein.

<u>$(c) \Rightarrow (a)$</u>: Wir betrachten wieder die Funktion $h = f - g$ und zeigen, dass die Menge $M := \{z \in G : h^{(n)}(z) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0\}$ offen und abgeschlossen in G ist. Nach einem aus der ANALYSIS bekannten Sachverhalt gilt dann $M = G$ (und damit insbesondere $f = g$ auf G), da G als zusammenhängende Menge nur zwei Teilmengen mit dieser Eigenschaft besitzt, die leere Menge und G selbst. Nach Voraussetzung (c) ist M aber nicht leer.

Die Abgeschlossenheit von M erkennt man daran, dass sich M als Durchschnitt der Mengen $M_n := \{z \in G : h^{(n)}(z) = 0\}$, $n \in \mathbb{N}_0$, schreiben lässt, und dass jede dieser Mengen (als Urbild von $\{0\}$ unter der stetigen Abbildung $h^{(n)}$) in G abgeschlossen ist.

Zum Nachweis der Offenheit von M betrachten wir einen beliebigen Punkt $z_0 \in M$. Nach Definition von M sind dann alle Koeffizienten der Taylor-Reihe von h um z_0 gleich 0, d.h., h ist auf einer Kreisscheibe $U_r(z_0) \subseteq G$ die Nullfunktion. Natürlich ist dann auch jede der Ableitungen $h^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, dort die Nullfunktion, und das bedeutet, dass $U_r(z_0)$ in M liegt. ■

Das Beispiel 4.3.4 schließt übrigens nicht aus, dass die Aussagen (b) und (c) des Satzes 4.3.3 auch bei unzusammenhängendem G äquivalent sind. Dass diese Äquivalenz tatsächlich vorliegt, zeigt eine einfache Analyse des vorherigen Beweises (Übungsaufgabe).

4.3.5 Beispiel: Wie der Satz 4.3.1 besitzt auch der Satz 4.3.3 für reelle C^∞-Funktionen kein Analogon. Dies sieht man anhand der für alle $x \in \mathbb{R}$ definierten Funktion

$$f(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{für } x = 0\,, \end{cases}$$

deren Nullstellen $\frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, sich bei 0 häufen, die aber offensichtlich nicht die Nullfunktion ist. ◊

Als erste Konsequenz des Identitätssatzes formulieren wir eine Aussage über die Verteilung der Nullstellen, allgemeiner der b-Stellen, einer holomorphen Funktion. Dabei verstehen wir unter einer ***b*-Stelle** einer Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ jeden Punkt aus D, an dem der komplexe Wert b angenommen wird. Die Menge aller b-Stellen ist $f^{-1}(b) = \{z \in G : f(z) = b\}$. Diese Menge kann auch leer sein (falls $b \in \mathbb{C} \setminus f(D)$), in jedem Fall ist sie aber (als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{b\}$) abgeschlossen in D.

Dass man an Stelle von b-Stellen häufig die spezielleren Nullstellen betrachten, bedeutet keine Einschränkung, denn offensichtlich ist jede b-Stelle einer Funktion $f(z)$ eine Nullstelle der Funktion $f(z) - b$ und umgekehrt.

4.3.6 Satz (über die Isoliertheit der *b*-Stellen): *Ist $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, so ist für jedes $b \in \mathbb{C}$ die Menge $f^{-1}(b)$ diskret in G und damit höchstens abzählbar.*

Beweis: Besäße die Menge $f^{-1}(b)$ einen Häufungspunkt in G, so wäre f nach Satz 4.3.3 konstant gleich b, im Widerspruch zur Voraussetzung. Die Abzählbarkeit von $f^{-1}(b)$ folgt aus der Tatsache, dass sich G (wie jede offene Menge in $\mathbb{C}$) als abzählbare Vereinigung von kompakten Kreisscheiben (Mittelpunkt mit rationalem Real- und Imaginärteil) darstellen lässt, und dass jede dieser Kreisscheiben nur endlich viele Punkte der diskreten Menge $f^{-1}(b)$ enthält. ■

Der Satz 4.3.6 besagt, dass es (unter den dortigen Voraussetzungen) um jedes Urbild a eines Wertes $b \in f(D)$ eine Umgebung $U_r(a) \subseteq D$ gibt, in der der Wert b nur an der Stelle a angenommen wird. Im Beweis dieses Satzes haben wir ferner gesehen, dass in jedem kompakten Teil von D nur endlich viele b-Stellen liegen können. Um möglichen Fehlinterpretationen dieser Aussage vorzubeugen, betrachten wir zwei sehr einfache Beispiele.

4.3.7 Beispiele: Schon die Sinusfunktion zeigt, dass die Nullstellenmenge einer nichtkonstanten holomorphen Funktion nicht endlich sein muss. Dass dies selbst dann möglich ist, wenn die Nullstellen in einer beschränkten Menge liegen, zeigt die Funktion

$$f(z) := \sin\tfrac{1}{z}\,, \quad f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\,,$$

deren sämtliche Nullstellen die Form $\frac{1}{n\pi}$ mit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ haben (vgl. Übungsaufgabe 8). Diese Funktion zeigt ferner, dass die Nullstellen einer holomorphen Funktion durchaus einen Häufungspunkt besitzen können. Dieser muss aber am Rand des Holomorphiebereichs der betrachteten Funktion liegen. ♢

Wir beschließen den Abschnitt über die Fortsetzung holomorpher Funktionen mir der Frage, in welchem Zusammenhang die aus der ANALYSIS bekannten reell-analytischen Funktionen mit den holomorphen Funktionen der FUNKTIONENTHEORIE stehen. Eine rundum befriedigende Antwort auf diese Frage gibt der folgende Satz.

4.3.8 Satz (über die Fortsetzung reell-analytischer Funktionen): *Eine auf einem offenen Intervall I definierte Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ besitzt genau dann eine holomorphe Fortsetzung $f : G \to \mathbb{C}$ auf ein die Menge $I \times \{0\}$ enthaltendes Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$, wenn φ reell-analytisch ist.*

Beweis: ($\Rightarrow$) Ist eine Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ reell-analytisch, so besitzt sie um jeden Punkt $\alpha \in I$ eine Potenzreihendarstellung $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (x-\alpha)^k$ mit reellen Koeffizienten γ_k und positivem Konvergenzradius $r = r(\alpha)$. Offensichtlich besitzt dann auch die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (z-\alpha)^k$ mit komplexem z den Konvergenzradius $r(\alpha)$ und definiert somit die holomorphe Funktion

$$f_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_k (z-\alpha)^k\,, \quad f_\alpha : U_{r(\alpha)}(\alpha) \to \mathbb{C}\,.$$

Um damit auf der Menge $G := \bigcup_{\alpha \in I} U_{r(\alpha)}(\alpha)$, die augenscheinlich ein Gebiet ist und die Menge $I \times \{0\}$ enthält, die gesuchte holomorphe Fortsetzung in nahe liegender – und zwar eindeutiger – Weise definieren zu können, müssen wir noch klären, dass die zu je zwei Umgebungen $U_{r(\alpha)}(\alpha)$ und $U_{r(\beta)}(\beta)$ mit $\alpha, \beta \in I$ gehörigen Funktionen f_α und f_β auf dem Durchschnitt $U_{r(\alpha)}(\alpha) \cap U_{r(\beta)}(\beta)$, sofern dieser nicht leer ist, übereinstimmen. Dies folgt aber sofort aus der Tatsache, dass jeder solche Durchschnitt ein offenes Intervall enthält, dass f_α und f_β dort übereinstimmen (nämlich gleich φ sind) und damit nach dem Identitätssatz 4.3.3 identisch sind.

($\Leftarrow$) Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, und gilt $f(x) = \varphi(x)$ für alle $x \in I$, so besitzt f um jeden Punkt $\alpha \in I$ eine Potenzreihendarstellung $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-\alpha)^k$ mit komplexen Koeffizienten c_k und Konvergenzradius $r = r(\alpha) > 0$, und es gilt

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-\alpha)^k \quad \text{für alle } x \in (a-r, a+r)\,.$$

Um zu zeigen, dass φ reell-analytisch ist, müssen wir die komplexen c_k als reell nachweisen. Zu diesem Zwecke erinnern wir daran, dass jedes der c_k nach Satz 4.1.1 bis auf den reellen Faktor $\frac{1}{k!}$ gleich $f^{(k)}(\alpha)$ ist. Dass im vorliegenden Fall alle Ableitungen von f bei α tatsächlich reell sind, folgt aus der Tatsache, dass für die reelle Darstellung (u, v) von f die Beziehungen $u(x, 0) = \varphi(x)$ und $v(x, 0) = 0$ für alle $x \in I$ gelten, und folglich $f'(x) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, 0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, 0) = \varphi'(x)$ für alle $x \in I$ gilt. Entsprechend sind auch alle höhere Ableitungen von f für reelle Argumente reell. ■

Aufgaben

1. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen für je zwei holomorphe Funktionen $f, g : D \to \mathbb{C}$ auch dann äquivalent sind, wenn D nicht zusammenhängend ist:
   (a) Die Menge $\{z \in D : f(z) = g(z)\}$ hat einen Häufungspunkt in D.
   (b) Es gibt einen Punkt $a \in D$ mit $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. Zeigen Sie: Entwickelt man eine holomorphe Funktion an einer Stelle in ihre Taylorreihe, so liegt auf dem Rand der zugehörigen Konvergenzkreisscheibe mindestens eine Stelle, an der die Funktion nicht holomorph ist.
3. Wie groß ist der Konvergenzradius der Taylor-Reihe der Funktion
$$\varphi(x) := \frac{1}{1+x^2}\,, \quad \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
mit Entwicklungsmittelpunkt 0? Interpretieren Sie das Ergebnis aus Sicht der reellen Analysis und der Funktionentheorie.
Hinweis: Sie können reell rechnen, aber auch komplex denken.
4. Zeigen Sie, dass eine auf einem offenen Intervall I definierte C^∞-Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ genau dann reell-analytisch ist, wenn es zu jedem Punkt $\alpha \in I$ positive Konstanten K und r gibt mit
$$|\varphi^{(n)}(x)| \le \frac{n!}{r^n} K \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } x \in (\alpha - r, \alpha + r)\,.$$

4.4 Gebietstreue und Maximumprinzip

Wir wenden uns jetzt wieder den Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen zu und rekapitulieren zunächst, dass bei einer holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ nach Satz 4.3.6 die Urbildmengen $f^{-1}(b)$ einzelner Punkte b des Wertebereichs $f(D)$ aus isolierten Punkten bestehen, also sehr „dünn“ sind. Von den Bildmengen $f(U)$ offener Mengen $U \subseteq D$ wird man daher erwarten, dass sie dementsprechend „dick“ sind, also offen. Obwohl dies in der reellen Analysis bekanntlich nicht zutrifft – z.B. bildet die Funktion $x \mapsto x^2$ die offene Menge $\mathbb{R}$ auf das nicht offene Intervall $[0, \infty)$ ab – wird sich die Offenheit holomorpher Bilder offener Mengen als zutreffend erweisen. Dass man hierbei konstante Funktionen ausschließen muss, ist offensichtlich. Genauer gilt folgender Satz.

4.4.1 Satz (über die Offenheit holomorpher Bilder offener Mengen): *Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und auf keiner Zusammenhangskomponente von D konstant ist, so ist $f(D)$ offen in $\mathbb{C}$.*

Der Beweis dieses Satzes beruht auf einer Aussage über Nullstellen, die wir als Hilfssatz formulieren, da wir später nochmals auf sie zurückgreifen wollen.

4.4.2 Hilfssatz: *Es sei $g : D \to \mathbb{C}$ holomorph, und $U_r(a)$ sei eine Kreisscheibe mit $\overline{U_r(a)} \subset D$. Gilt dann*

$$|g(a)| < \min_{z \in S_r(a)} |g(z)|, \tag{4.10}$$

so hat g eine Nullstelle in $U_r(a)$.

Beweis: Wir nehmen an, g habe keine Nullstelle in $U_r(a)$. Da g wegen der vorausgesetzten Ungleichungen (4.10) auch keine Nullstelle am Rand von $U_r(a)$ hat, gilt dies sogar auf einer offenen Umgebung $U \subseteq D$ von $\overline{U_r(a)}$. Die Funktion $h(z) := 1/g(z)$ ist dann holomorph auf U, und die Cauchy'sche Abschätzung (4.8) liefert für $n = 0$ die Ungleichung $|h(a)| \leq \max_{z \in S_r(a)} |h(z)|$, und damit

$$\frac{1}{|g(a)|} \leq \max_{z \in S_r(a)} \frac{1}{|g(z)|} = \frac{1}{\min\limits_{z \in S_r(a)} |g(z)|}.$$

Die hieraus folgende Ungleichung $|g(a)| \geq \min\limits_{z \in S_r(a)} |g(z)|$ widerspricht (4.10). ■

Beweis von Satz 4.4.1: Da es genügt, von jeder einzelnen Zusammenhangskomponente von D zu zeigen, dass sie ein offenes Bild besitzt, können wir annehmen, dass D selbst zusammenhängend und f auf D nicht konstant ist.

Hierzu betrachten wir einen beliebigen Punkt $b \in f(D)$ und einen zugehörigen Punkt $a \in D$ mit $f(a) = b$. Da f nicht konstant ist, liefert der Satz 4.3.6 über die Isoliertheit der b-Stellen von f eine abgeschlossene Kreisscheibe $\overline{U_r(a)} \subset D$, in der a die einzige b-Stelle ist. Damit besitzt die stetige Funktion $|f(z) - b|$ für z aus der kompakten Menge $S_r(a)$ ein positives Minimum, d.h., es gilt

$$\varepsilon := \min_{z \in S_r(a)} \big|f(z) - b\big| > 0 .$$

Um die Inklusion $U_{\varepsilon/3}(b) \subseteq f(D)$ zu zeigen, die offensichtlich den Beweis beschließt, wählen wir einen beliebigen Punkt $w_0 \in U_{\varepsilon/3}(b)$ und suchen einen Punkt $z_0 \in D$ mit $f(z_0) = w_0$. Mit anderen Worten, wir suchen eine Nullstelle der Funktion $g(z) := f(z) - w_0$ in D, und zwar mittels Hilfssatz 4.4.2. Im Hinblick auf die Verifikation der Ungleichung (4.10) stellen wir fest, dass einerseits für alle $z \in S_r(a)$ die Beziehung

$$|g(z)| = |f(z) - w_0| \geq |f(z) - b| - |w_0 - b| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}$$

gilt, und andererseits $|g(a)| = |f(a) - w_0| = |b - w_0| < \frac{\varepsilon}{3}$. Damit ist (4.10) verifiziert und der Beweis beendet. ∎

Eine offensichtliche Konsequenz des Satzes 4.4.1 ist der folgende, besonders einprägsame Satz.

4.4.3 Satz (von der Gebietstreue): *Ist $f : G \to \mathbb{C}$ eine nichtkonstante holomorphe Funktion und G ein Gebiet, so ist auch $f(G)$ ein Gebiet.*

Beweis: Da $f(G)$ als stetiges Bild einer zusammenhängenden Menge zusammenhängend ist, folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz 4.4.1. ∎

Ein zweiter Problemkreis im Zusammenhang mit den Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen betrifft das Auftreten von Extremwerten der zu einer holomorphen Funktion f gehörigen Betragsfunktion $|f|$. Das grundlegende Resultat hierzu lautet wie folgt.

4.4.4 Satz (vom Maximumprinzip): *Gegeben sei ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ und eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$. Dann gilt:*

(a) Besitzt die Funktion $|f| : G \to \mathbb{R}$ ein lokales Maximum in G, so ist f konstant.

(b) Ist G beschränkt und f auch noch am Rand von G definiert und stetig, so gibt es ein $a \in \partial G$ mit $f(a) = \max_{z \in \overline{G}} |f(z)|$.

Veranschaulicht man sich wie üblich den Graphen der Funktion $|f| : G \to \mathbb{R}$ als Fläche – noch anschaulicher als „Gebirge“ – im $\mathbb{R}^3$ über der Ebene $\mathbb{R}^2$, so besagt die Aussage (a) des Satzes 4.4.4, dass es bei einer holomorphen Funktion in diesem „Gebirge“ keine echten „Gipfel“ gibt. Dass die entsprechende Aussage für reell-analytische Funktionen nicht gilt, zeigt das Beispiel $\exp(-x^2)$.

4.4.5 Beispiel: Dass auf die Beschränktheit von G in der Aussage (b) des Satzes 4.4.4 nicht verzichtet werden kann, zeigt das Beispiel der Funktion

$$f(z) := \exp(\exp z)\,, \quad \text{eingeschränkt auf} \quad S := \{z \in \mathbb{C} : -\tfrac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \tfrac{\pi}{2}\}\,.$$

Am Rand von S ist die Funktion $|f|$ identisch 1, denn es gilt (vgl. Satz 1.4.7 (d)) $|\exp(\exp(z))| = \exp(\operatorname{Re} \exp(z)) = \exp(\exp(\operatorname{Re} z) \cos \operatorname{Im} z)$, und für $\operatorname{Im} z = \pm\frac{\pi}{2}$ gilt $\cos \operatorname{Im} z = 0$. Längs der reellen Achse wächst $|f|$ jedoch unbeschränkt. ◊

Beweis von Satz 4.4.4: (a) Nach Voraussetzung gibt es eine Kreisscheibe $U_r(a)$ in G, sodass $|f(z)| \le |f(a)|$ für alle $z \in U_r(a)$ gilt. Mit anderen Worten, es gilt $f(z) \in U_{|f(a)|}(0)$ für alle $z \in U_r(a)$ (siehe Abbildung), also

$$f\big(U_r(a)\big) \subseteq U_{|f(a)|}(0)\,.$$

Der Punkt $f(a)$ liegt einerseits am Rand der Kreisscheibe $U_{|f(a)|}(0)$, andererseits ist er ein Element von $f(U_r(a))$. Damit ist $f(a)$ ein zum Rand der Menge $f(U_r(a))$ gehöriger Punkt dieser Menge, die daher nicht offen ist. Nach dem Satz 4.4.3 von der Gebietstreue ist f dann konstant auf $U_r(a)$, und nach dem Identitätssatz sogar auf ganz G.

(b) Da der Fall einer konstanten Funktion f trivial ist, können wir annehmen, dass f nicht konstant ist. Dann nimmt $|f|$ als stetige Funktion auf der kompakten Menge $\overline{G}$ ein globales Maximum an einer Stelle $a \in \overline{G}$ an. Läge der Punkt a in G, so wäre $f(a)$ ein lokales Maximum, und nach Teil (a) wäre f auf G konstant, im Widerspruch zur eingangs gemachten Annahme. Folglich liegt jede Stelle, an der $|f|$ das globale Maximum annimmt, am Rand von G. ∎

Dass man im Satz 4.4.4 nicht einfach „Maximum“ durch „Minimum“ ersetzen kann, ist leicht zu sehen. Dazu braucht man nur das triviale Beispiel $f(z) = z$ auf $G = \mathbb{C}$ zu betrachten. Die hiermit ersichtliche „Asymmetrie“ hat offensichtlich ihren Grund in der Tatsache, dass $|f|$ stets nach unten beschränkt ist, im Allgemeinen aber nicht nach oben. Es stellt sich daher die Frage, ob es für Funktionen, bei denen $|f|$ das Minimum 0 nicht annehmen kann – das sind offensichtlich genau die Funktionen ohne Nullstellen – ein dem Maximumprinzip entsprechendes Minimumprinzip gibt. Die uneingeschränkt positive Antwort auf diese Frage gibt der folgende Satz.

4.4.6 Satz (vom Minimumprinzip): *Gegeben sei ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ und eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ ohne Nullstelle. Dann gilt:*

(a) Besitzt die Funktion $|f| : G \to \mathbb{R}$ ein lokales Minimum in G, so ist f konstant.

(b) Ist G beschränkt und f auch noch am Rand von G definiert und stetig, so gibt es ein $a \in \partial G$ mit $|f(a)| = \min\limits_{z \in \overline{G}} |f(z)|$.

Beweis: Man wendet Satz 4.4.4 auf die Funktion $1/f$ an. ■

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einem Rückblick auf den Hilfssatz 4.4.2, dessen nur vorübergehende Bedeutung jetzt ersichtlich ist. Es handelt sich bei diesem Hilfssatz nämlich um einen einfachen Spezialfall des Minimumprinzips, da die Ungleichung (4.10) nach Satz 4.4.6 (b) für eine nullstellenfreie holomorphe Funktion nicht möglich.

Aufgaben

1. Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, und $(u, v) : G \to \mathbb{R}^2$ sei die reelle Darstellung einer holomorphen Funktion $f : G \to \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie: Hat die Funktion $u : G \to \mathbb{R}$ ein lokales Maximum in G, so ist sie konstant.

(b) Gilt diese Aussage auch für die Funktion $v : G \to \mathbb{R}$?

(c) Kann man in den vorherigen Aussagen „Maximum" durch „Minimum" ersetzen?

Hinweis zu (a): Betrachten Sie die Funktion e^u.

2. Eine auf einem beschränkten Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ definierte Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ habe die Eigenschaft, dass sie bei Annäherung an den Rand von G gleichmäßig gegen ∞ strebt, uns zwar in folgendem Sinne: zu jedem $M > 0$ gibt es ein $\rho > 0$ mit $|f(z)| \geq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{dist}(z, \partial G) \leq \rho$ (hierbei ist $\operatorname{dist}(z, \partial G) := \inf_{w \in \partial G} |z - w|$).

Zeigen Sie, dass f nicht holomorph ist.

4.5 Ganze Funktionen und Polynome

Wir wenden uns nun einer Klasse besonders einfacher holomorpher Funktionen zu, den *ganzen* Funktionen. Diese sind bekanntlich dadurch ausgezeichnet, dass sie auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph sind. Beispiele ganzer Funktionen sind e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$ und $\cosh z$. Insbesondere sind alle Polynome ganze Funktionen.

Ein zentrales Merkmal ganzer Funktionen ist, dass jede ihrer Potenzreihenentwicklungen (nach Satz 4.1.1) den Konvergenzradius ∞ besitzt. Diese Eigenschaft hat eine bemerkenswerte Konsequenz, die der folgende berühmte Satz mit seinem erstaunlich einfachen Beweis beschreibt.

4.5.1 Satz (von Liouville): *Ist eine ganze Funktion beschränkt, so ist sie konstant.*

Der Beweis dieses Satzes ist so einfach, dass er sich leicht verallgemeinern lässt zum Beweis des folgenden Satzes, der eine hinreichende Bedingung dafür angibt, dass eine ganze Funktion eine abbrechende Potenzreihendarstellung besitzt und somit ein Polynom ist. Er enthält für $n = 0$ den Satz von Liouville als Spezialfall.

4.5.2 Satz (Abbrechende Potenzreihen): *Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, und es gebe ein $n \in \mathbb{N}_0$ sowie positive Zahlen M, R derart, dass*

$$|f(z)| \leq M\,|z|^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R$$

gilt. Dann ist f ein Polynom vom Grade $\leq n$.

Beweis: Als ganze Funktion besitzt f nach Satz 4.1.1 die auf ganz $\mathbb{C}$ gültige Potenzreihendarstellung $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, z^k$, und nach Satz 4.1.5 gilt

$$\left|f^{(k)}(0)\right| \leq \frac{k!}{r^k}\, M\, r^n \quad \text{für alle } r \geq R \text{ und } k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Da bei festem $k > n$ die rechte Seite für $r \to \infty$ gegen 0 strebt, gilt $f^{(k)}(0) = 0$ für alle $k > n$. Folglich ist $f(z)$ das Polynom $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, z^k$. ■

Der Satz von Liouville impliziert, dass es zu jeder nichtkonstanten ganzen Funktion f eine Folge komplexer Zahlen $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gibt, für die $\lim_{k\to\infty} |z_k| = \infty$ und $\lim_{k\to\infty} |f(z_k)| = \infty$ gilt. Im Fall der Funktion $\sin z$ ist z. B. $z_k := ki$ eine solche Folge, denn es gilt $|\sin ki| = [\exp(k) - \exp(-k)]/2$. Dass im Fall von Polynomen die Funktionswerte sogar längs *jeder* gegen ∞ strebenden Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen ∞ streben, ergibt sich aus folgendem Satz.

4.5.3 Satz (Wachstum von Polynomen): *Ist $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom n-ten Grades, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R_\varepsilon > 0$ mit*

$$(1-\varepsilon)\,|a_n z^n| \;\le\; |p(z)| \;\le\; (1+\varepsilon)\,|a_n z^n| \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \ge R_\varepsilon\,.$$

Beweis: Da der Fall eines konstanten Polynoms ($n = 0$) trivial ist, können wir $n \ge 1$ voraussetzen. Zum gegebenen $\varepsilon > 0$ definieren wir $r_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon |a_n|} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \ge R_\varepsilon := \max\{1, r_\varepsilon\}$ gilt dann

$$\bigl|p(z) - a_n z^n\bigr| \;\le\; \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\,|z|^k \;\overset{|z|\ge 1}{\le}\; \Bigl(\frac{1}{|z|} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\Bigr) |z|^n \;\overset{|z|\ge r_\varepsilon}{\le}\; \varepsilon\,|a_n|\,|z|^n\,.$$

Daraus folgt für alle $|z| \ge R_\varepsilon$

$$\begin{aligned}(1-\varepsilon)|a_n z^n| \;&\le\; |a_n z^n| - |p(z) - a_n z^n| \;\le\; |p(z)| \;\le\\ &\le\; |a_n z^n| + |p(z) - a_n z^n| \;\le\; (1+\varepsilon)|a_n z^n|\end{aligned}$$ ■

Die wohl herausragendste Eigenschaft von Polynomen, die in vielen Zusammenhängen eine zentrale Rolle spielt, ist die Existenz und Berechenbarkeit ihrer Nullstellen. Das im Reellen bekannte Problem, dass es nicht-konstante Polynome ohne Nullstellen gibt – so z. B. $x^4 + 1$ – kann im komplexen Kontext nicht auftreten. Das grundlegende Resultat hierzu ist der folgende Satz.

4.5.4 Satz (Fundamentalsatz der Algebra): *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis: Zu dem mit $p(z)$ bezeichneten, gegebenen Polynom gibt es nach Satz 4.5.3 positive Konstante M und R, sodass $|p(z)| \ge M|z|^n$ für alle $|z| \ge R$ gilt. Nehmen wir nun an, $p(z)$ habe keine Nullstelle in $\mathbb{C}$, so ist die Funktion $f(z) := 1/p(z)$ ganz, und es gilt

$$|f(z)| \;=\; \frac{1}{|p(z)|} \;\le\; \frac{1}{M\,|z|^n} \;\le\; \frac{1}{M\,R^n} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus U_R(0)\,.$$

Da f in der kompakten Menge $\overline{U_R(0)}$ trivialerweise beschränkt ist, ist f auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt, und nach dem Satz von Liouville konstant. Dies widerspricht der Voraussetzung, dass p nicht-konstant ist. ■

Der Fundamentalsatz der Algebra impliziert, dass jedes Polynom n-ten Grades genau n Nullstellen besitzt, wenn man jede dieser Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit mehrmals zählt, und dass sich jedes Polynom als Produkt von Polynomen ersten Grades, so genannten **Linearfaktoren**, schreiben lässt. Diese landläufig als bekannt angesehenen Tatsachen wollen wir in einem eigenen Satz formulieren und beweisen.

4.5.5 Satz (Faktorisierungssatz): *Jedes Polynom* $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *vom Grad* n *ist (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig darstellbar als Produkt*

$$p(z) = a_n (z - c_1)^{m_1} (z - c_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (z - c_r)^{m_r} .$$

Hierbei sind $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{C}$ *die paarweise verschiedenen Nullstellen von* p*, und* $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ *sind die zugehörigen Vielfachheiten, deren Summe den Wert* n *ergibt.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass sich $p(z)$ in der Form $(z - c)q(z)$ schreiben lässt, wobei c eine Nullstelle von p ist und q ein Polynom vom Grad $\leq n - 1$. Der Rest folgt hieraus mit vollständiger Induktion.

Es sei also c eine Nullstelle von p. Mit Hilfe der Binomischen Formel gilt dann

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - c + c)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \Big[\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (z - c)^{k-j} c^j \Big] .$$

Dieser Ausdruck lässt sich mit geeigneten Koeffizienten $b_0, \ldots, b_n$ in die Form $\sum_{k=0}^{n} b_k (z - c)^k$ bringen, und da p an der Stelle c verschwindet, gilt $b_0 = 0$. Folglich können wir $p(z)$ in der Form

$$p(z) = (z - c) \sum_{k=1}^{n} b_k (z - c)^{k-1}$$

darstellen. Mit $q(z) := \sum_{k=1}^{n} b_k (z - c)^{k-1}$ ist damit der Beweis erbracht. ■

Nachdem wir für Polynome eine Reihe interessanter Eigenschaften hergeleitet haben, wollen wir uns noch kurz den ganzen Funktionen zuwenden, die keine Polynome sind, den so genannten **ganz-transzendenten** Funktionen. Die Funktionen dieser Klasse, deren prominenteste Vertreter e^z, $\sin z$ und $\cos z$ sind, haben die im folgenden Satz beschriebene bemerkenswerte Eigenschaft.

4.5.6 Satz (von Casorati-Weierstraß): *Es sei* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *eine ganz-transzendente Funktion. Dann gibt es zu jedem* $w \in \mathbb{C}$ *eine Folge komplexer Zahlen* $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *mit* $\lim_{k \to \infty} |z_k| = \infty$ *und* $\lim_{k \to \infty} f(z_k) = w$.

Das in diesem Satz beschriebene Verhalten von ganz-transzendenten Funktionen steht in krassem Gegensatz zum Verhalten von Polynomen, die nach Satz 4.5.3 bei unbeschränkt wachsenden Argument wie ihre höchsten Potenzen anwachsen. Ganz-transzendente Funktionen kommen dagegen außerhalb jeder beliebig großen Kreisscheibe jeder komplexen Zahl beliebig nahe. Mit anderen Worten, für jedes $R \geq 0$ ist das Bild der Menge $\mathbb{C} \setminus U_R(0)$ unter einer ganz-transzendenten Funktion dicht in $\mathbb{C}$.

Es gilt sogar eine weiter gehende, aber sehr viel schwerer zu beweisende, Aussage (Satz von Picard), die besagt, dass jede ganz-transzendente Funktionen außerhalb jeder Kreisscheibe jede komplexe Zahl, mit höchstens einer Ausnahme, als Wert tatsächlich annimmt. Wie schon die nirgends verschwindende Exponentialfunktion zeigt, kann bei dieser Aussage auf den Ausnahmepunkt nicht verzichtet werden.

Beweis von Satz 4.5.6: Um den Beweis indirekt zu führen, formalisieren wir die Behauptung wie folgt: $\forall\, w \in \mathbb{C}\, \forall\, \varepsilon > 0\, \forall\, R > 0\, \exists z \in \mathbb{C} \setminus U_R(0) : |f(z) - w| < \varepsilon$. Die Widerspruchsannahme besagt also, dass es ein $w \in \mathbb{C}$ und positive Zahlen ε und R gibt mit

$$|\,f(z) - w\,| \;\geq\; \varepsilon \quad \text{für alle } |z| \geq R\,.$$

Hieraus folgt zunächst, dass alle Nullstellen der Funktion $f(z) - w$ in $\overline{U_R(0)}$ liegen, und da $f(z) - w$ nicht konstant ist, gibt es nach dem Identitätssatz nur endlich viele Nullstellen $c_1, \ldots, c_r$ (oder gar keine) in $\overline{U_R(0)}$. Bezeichnen wir die zugehörigen Vielfachheiten der Nullstellen mit $m_1, \ldots, m_r$, so ist die Funktion

$$g(z) := \frac{f(z) - w}{\prod\limits_{\rho=1}^{r} (z - c_\rho)^{m_\rho}}\,, \quad g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

ganz und nullstellenfrei (im Fall ohne Nullstellen sei das Produkt gleich 1). Das im Nenner von $g(z)$ stehende Produkt ist ein Polynom vom Grad $m := m_1 + \ldots + m_r \geq 0$, und so existieren nach Satz 4.5.3 positive S und M mit

$$\Big|\prod_{\rho=1}^{r} (z - c_\rho)^{m_\rho}\Big| \;\leq\; M\,|z|^n \quad \text{für alle } |z| \geq S\,.$$

Wie g ist auch die Funktion $1/g$ ganz und nullstellenfrei, und es gilt

$$\frac{1}{|g(z)|} \;=\; \frac{\Big|\prod\limits_{\rho=1}^{r} (z - c_\rho)^{m_\rho}\Big|}{|\,f(z) - w\,|} \;\leq\; \frac{M}{\varepsilon}\,|z|^n \quad \text{für alle } |z| \geq \max\{R, S\}\,.$$

Nach Satz 4.5.2 ist $1/g$ ein Polynom, und da es keine Nullstelle besitzt, ist es nach dem Fundamentalsatz der Algebra konstant. Dann ist auch g konstant, und ist γ der Wert von g, so gilt

$$f(z) = w + \gamma \prod_{\rho=1}^{r} (z - c_\rho)^{m_\rho} .$$

Damit ist f ein Polynom, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass f ganz-transzendent ist. ∎

Aufgaben

1. Gegeben sei ein reelles Polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Zeigen Sie:

(a) Ist c eine komplexe Nullstelle von p, so auch $\overline{c}$.

(b) Für reelles x lässt sich $p(x)$ als Produkt reeller Polynome vom Grad ≤ 2 darstellen.

2. Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra mit Hilfe des Satzes über das Wachstum von Polynomen und des Minimumprinzips (ohne Verwendung des Satzes von Liouville).

4.6 Hauptsatz der Cauchy'schen Theorie

Die in den vorherigen fünf Abschnitten erzielten Ergebnisse basieren sämtlich auf dem am Ende des Kapitels 3 hergeleiteten Cauchy'schen Integralsatz für Sterngebiete (Satz 3.4.1) und der hieraus abgeleiteten Cauchy'schen Integralformel für Kreisscheiben (Satz 3.4.4). Im Hinblick auf weiter gehende Anwendungen beschließen wir das gegenwärtige Kapitel 4 mit einer Verallgemeinerung der beiden genannten Sätze. Dabei geht es einerseits darum, den Cauchy'schen Integralsatz von der Voraussetzung zu befreien, nur auf Sterngebieten gültig zu sein, und andererseits für die Cauchy'sche Integralformel (3.22) die Beschränkung auf Kreisscheiben aufzuheben.

Um diese Ziele zu erreichen, müssen wir zunächst klären, wie man mit analytischen Mitteln feststellen kann, ob ein geschlossener Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ einen nicht auf diesem Weg liegenden Punkt z „umrundet“ oder nicht, und wie oft dies gegebenenfalls geschieht. Zu diesem Zwecke betrachten wir die komplexe Zahl bzw. Funktion

$$w_\gamma(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}\,, \quad w_\gamma : \mathbb{C}\setminus\gamma([a,b]) \to \mathbb{C}\,, \tag{4.11}$$

die man die **Umlaufzahl**, auch **Windungszahl** oder **Index**, von γ bezüglich z nennt. Dass diese im Moment noch nicht einsichtige Namensgebung gerechtfertigt ist, wird sich im Folgenden erweisen. Immerhin zeigt ein Rückblick auf den Satz 3.2.8, dass im Fall eines einmal im positiven Sinne durchlaufenen Kreises $S_r(a)$ die Umlaufzahl $w_\gamma(z)$ für jeden Punkt aus $U_r(a)$ gleich 1 ist, und 0 für jeden Punkt aus $\mathbb{C}\setminus\overline{U_r(a)}$.

Bevor wir einige grundlegende Eigenschaften der Umlaufzahl herleiten, sei an den unmittelbar einsichtigen Sachverhalt erinnert, dass ein geschlossener Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ die komplexe Zahlenebene disjunkt in die kompakte Menge $\gamma([a,b])$ und die offene Menge $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$ zerlegt. Die Menge $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$ wiederum besteht aus mehreren (endlich viele, mindestens zwei) Zusammenhangskomponenten, von denen in jedem Fall genau eine unbeschränkt ist, nämlich diejenige, die das Äußere aller Kreisscheiben enthält, in der die Menge $\gamma([a,b])$ liegt.

4.6.1 Satz (Eigenschaften der Umlaufzahl): *Für jeden geschlossenen Weg γ in $\mathbb{C}$ hat die (4.11) definierte Umlaufzahl folgende Eigenschaften:*

(a) *Sie besitzt nur ganzzahlige Werte.*

(b) *Sie ist auf jeder Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$ konstant.*

(c) *Sie verschwindet auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$.*

Beweis: (a) Wir betrachten für ein festes $z \in \mathbb{C}\backslash\gamma([a,b])$ die auf $[a,b]$ definierten Hilfsfunktionen

$$h(t) := \exp\Big(\int_a^t \frac{\dot\gamma(\tau)}{\gamma(\tau)-z}\,d\tau\Big) \quad \text{und} \quad g(t) := \frac{h(t)}{\gamma(t)-z}\,.$$

Der Nachweis der Ganzzahligkeit von $w_\gamma(z)$ reduziert sich damit auf den Beweis der Beziehung $h(b)=1$, denn einerseits gilt $h(b)=\exp(w_\gamma(z)\cdot 2\pi i)$, und andererseits nimmt die Funktion exp genau an den ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$ den Wert 1 an (siehe Satz 1.4.7).

Um $h(b)=1$ zu zeigen, schließen wir von $\dot h(t)=h(t)\dot\gamma(t)/(\gamma(t)-z)$ auf

$$\dot g(t) = \frac{\dot h(t)\,(\gamma(t)-z)-h(t)\,\dot\gamma(t)}{(\gamma(t)-z)^2} = 0 \quad \text{für alle } t\in[a,b]\,.$$

Folglich ist $g(t)$ konstant, etwa gleich c, und damit gilt $h(t)=c(\gamma(t)-z)$ für alle $t\in[a,b]$. Wegen $\gamma(a)=\gamma(b)$ impliziert dies $h(b)=h(a)=e^0=1$.

(b) Wegen des Zwischenwertsatzes und der in (a) bewiesenen Ganzzahligkeit von $w_\gamma(z)$ genügt der Nachweis der Stetigkeit von $w_\gamma(z)$. Um diese zu zeigen, wählen wir einen beliebigen Punkt $z_0\in\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$ und betrachten den Ausdruck

$$|\,w_\gamma(z)-w_\gamma(z_0)\,| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_\gamma\Big[\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-z_0}\Big]\,d\zeta\Big| = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_\gamma\frac{z-z_0}{(\zeta-z)(\zeta-z_0)}\,d\zeta\Big|$$

für alle $z\in\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$. Da die für alle $t\in[a,b]$ erklärte Funktion $|\gamma(t)-z_0|$ stetig und stets positiv ist, besitzt sie ein positives Minimum m, und daher gilt für alle $z\in U_{m/2}(z_0)$ (siehe Abbildung)

$$|\,\gamma(t)-z\,| \ge |\,\gamma(t)-z_0\,|-|\,z_0-z\,| \ge m-\frac{m}{2} = \frac{m}{2} > 0\,.$$

Insgesamt gilt damit für alle $z\in U_{m/2}(z_0)$ die Abschätzung

$$|\,w_\gamma(z)-w_\gamma(z_0)\,| \overset{(3.10)}{\le} L(\gamma)\max_{t\in[a,b]}\Big|\frac{z-z_0}{(\gamma(t)-z)(\gamma(t)-z_0)}\Big| \le \frac{4L(\gamma)}{m^2}\,|\,z-z_0\,|\,,$$

aus der sich sofort die Stetigkeit der Funktion w_γ an der Stelle z_0 ergibt.

(c) Wegen der in (b) bewiesenen Konstanz von w_γ auf der unbeschränkten Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b]$ brauchen wir dort nur einen einzigen Punkt zu finden, an dem die Funktion w_γ verschwindet. Wir wählen hierzu ein beliebiges $z_0\in\mathbb{C}$, sodass $|z_0-\gamma(t)|\ge L(\gamma)$ für alle $t\in[a,b]$ gilt. Diese Wahl ist wegen der Beschränktheit von $\gamma(t)$ offensichtlich möglich. Für z_0 gilt dann

$$|\,w_\gamma(z_0)\,| \overset{(3.10)}{\le} \frac{1}{2\pi}\,L(\gamma)\max_{t\in[a,b]}\frac{1}{|\gamma(t)-z_0|} \le \frac{1}{2\pi} < 1\,,$$

und da $w_\gamma(z_0)$ ganzzahlig ist, bedeutet dies $w_\gamma(z_0)=0$. ∎

Die Konstanz der Umlaufzahl auf den Zusammenhangskomponenten der Menge $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ haben wir im vorherigen Beweis dadurch gezeigt, dass wir die in (4.11) definierte Funktion $w_\gamma(z)$ als stetig nachgewiesen haben. Auf diese Stetigkeit, die wir fortan als einfache Folgerung aus der Aussage (b) des Satzes 4.6.1 ansehen können, sei an dieser Stelle ausdrücklich hingewiesen.

Mithilfe der Umlaufzahl führen wir für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ die folgenden – eigentlich geometrisch anmutenden – Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \operatorname{Int}\gamma &:= \{ z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b]) : w_\gamma(z) \neq 0 \} \,, \quad \textbf{Inneres} \text{ von } \gamma \,, && (4.12) \\ \operatorname{Ext}\gamma &:= \{ z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b]) : w_\gamma(z) = 0 \} \,, \quad \textbf{Äußeres} \text{ von } \gamma \,. && (4.13) \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort, dass sich die komplexe Zahlenebene mithilfe eines Weges γ in der Form

$$\operatorname{Int}\gamma \,\cup\, \gamma([a,b]) \,\cup\, \operatorname{Ext}\gamma \,=\, \mathbb{C} \tag{4.14}$$

als disjunkte Vereinigung darstellen lässt. Ferner haben $\operatorname{Int}\gamma$ und $\operatorname{Ext}\gamma$ die folgenden topologischen Eigenschaften (Übungsaufgabe):

$$\begin{aligned} &\operatorname{Int}\gamma \ \text{ ist offen und beschränkt}\,, && (4.15) \\ &\operatorname{Ext}\gamma \ \text{ ist offen und unbeschränkt}\,, && (4.16) \\ &\partial \operatorname{Int}\gamma \,\subseteq\, \gamma([a,b]) \,, \quad \partial \operatorname{Ext}\gamma \,\subseteq\, \gamma([a,b]) \,, && (4.17) \\ &\gamma([a,b]) \subseteq U_r(0) \implies \operatorname{Int}\gamma \subseteq U_r(0) \,, \ \mathbb{C} \setminus U_r(0) \subseteq \operatorname{Ext}\gamma \,. && (4.18) \end{aligned}$$

Im Hinblick auf die nun zu beweisende Verallgemeinerung des Cauchy'schen Integralsatzes und der Cauchy'schen Integralformel spielen diejenigen Wege γ eine besondere Rolle, für die in Bezug auf eine vorgegebene offene Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ die Beziehung $\operatorname{Int}\gamma \subseteq D$ gilt. Solche Wege heißen **nullhomolog** in D. Ein kreisförmiger Weg $S_r(0)$ ist offensichtlich nullhomolog in $\mathbb{C}$, aber nicht in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4.6.2 Satz (Hauptsatz der Cauchy'schen Theorie): *Ist D eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $\gamma : [a,b] \to D$ ein geschlossener Weg, so sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Der Weg γ ist nullhomolog in D.

(b) Für alle holomorphen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ gilt $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

(c) Für alle holomorphen Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ gilt

$$w_\gamma(z)\, f(z) \,=\, \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad \textit{für alle } z \in D \setminus \gamma([a,b])\,. \tag{4.19}$$

Beim Beweis dieses Satzes benötigen wir an zwei Stellen einen technischen Sachverhalt, den wir vorweg als Hilfssatz bereitstellen.

4.6.3 Hilfssatz: *Gegeben sei ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ und eine stetige Funktion $g : \gamma([a,b]) \times D \to \mathbb{C}$. Dann ist*

$$h(z) := \int_\gamma g(\zeta, z)\, d\zeta\,, \quad h : D \to \mathbb{C}$$

holomorph, falls $g(\zeta,\cdot) : D \to \mathbb{C}$ für jedes $\zeta \in \gamma([a,b])$ holomorph ist.

Beweis: Nach Satz 4.2.1 genügt es zu zeigen, dass $\int_{\partial\Delta} h(z)\,dz = 0$ ist für jedes Dreieck $\Delta \subset D$. Sei also Δ ein solches Dreieck, und $\delta : [c,d] \to D$ sei eine Parametrisierung von $\partial\Delta$. Dann gilt

$$\int_{\partial\Delta} h(z)\,dz = \int_{\partial\Delta} \Big[\int_\gamma g(\zeta,\eta)\,d\zeta\Big]\,d\eta = \int_c^d \Big[\int_a^b g\big(\gamma(t),\delta(s)\big)\dot\gamma(t)\dot\delta(s)\,dt\Big]\,ds\,.$$

Indem man den komplexen Integranden in Real- und Imaginärteil zerlegt, dann den Satz von Fubini der reellen Analysis verwendet, und schließlich Real- und Imaginärteil wieder zusammenfügt, erhält man

$$\int_{\partial\Delta} h(z)\,dz = \int_a^b \Big[\int_c^d g\big(\gamma(t),\delta(s)\big)\dot\gamma(t)\dot\delta(s)\,ds\Big]\,dt = \int_\gamma \Big[\int_{\partial\Delta} g(\zeta,\eta)\,d\eta\Big]\,d\zeta\,.$$

Da $g(\zeta,\cdot)$ nach Voraussetzung für jedes $\zeta \in \gamma([a,b])$ holomorph ist, verschwindet das Integral $\int_{\partial\Delta} g(\zeta,\eta)\,d\eta = 0$ für all diese ζ. Damit gilt $\int_{\partial\Delta} h(z)\,dz = 0$. ∎

Beweis des Satzes 4.6.2: Die Schwierigkeit des Beweises liegt im Nachweis, dass (a) hinreichend für (b) und (c) ist. Wir verifizieren daher zunächst die einfachen Implikationen $(c) \Rightarrow (b)$ und $(b) \Rightarrow (a)$, und dann $(a) \Rightarrow (c)$.

$\underline{(c) \Rightarrow (b)}$: Gegeben sei eine beliebige holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$. Dann ist bei festem $z_0 \in D \setminus \gamma([a,b])$ auch die Funktion $h(\zeta) := (\zeta - z_0) f(\zeta)$ holomorph auf D, und Anwendung der Formel (4.19) für $z := z_0$ auf $h(\zeta)$ liefert wegen $h(z_0) = 0$ die Beziehung $\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = 0$.

$\underline{(b) \Rightarrow (a)}$: Für jeden Punkt $z \in \mathbb{C} \setminus D$ ist die Funktion $f(\zeta) := 1/(\zeta - z)$ holomorph in D. Nach Voraussetzung (b) gilt dann

$$0 = \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 2\pi i \cdot w_\gamma(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus D\,.$$

Damit verschwindet w_γ außerhalb von D, d.h., es gilt $\operatorname{Int}\gamma \subseteq D$.

$\underline{(a) \Rightarrow (c)}$: Nachdem man lange nach einem einfachen Beweis für diese Implikation gesucht hatte, erschien im Jahre 1971 die Publikation „A brief proof of Cauchy's integral theorem“ von J. D. Dixon in den „Proceedings of the American

Mathematical Society" 29 (1971), Seiten 625-626. Wir orientieren uns an diesem Beweis, der auf folgender Idee beruht. Man formt die zu beweisende Identität (4.19) so um, dass sie mit einer geeigneten holomorphen Hilfsfunktion h_D als Identität $h_D(z) = 0$ auf D erscheint. Diese Identität wiederum verifiziert man, indem man h_D zu einer ganzen Funktion $h_{\mathbb{C}}$ fortsetzt, von der man mit Hilfe des Satzes von Liouville zeigt, dass sie identisch verschwindet.

Wir unterteilen den Beweis der Implikation $(a) \Rightarrow (c)$ in vier Schritte.

1. Schritt (Umformung von (4.19)): Mit Hilfe der für alle $(\zeta, z) \in D \times D$ erklärten Funktion

$$g(\zeta, z) := \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{für } \zeta \neq z\,, \\ f'(z) & \text{für } \zeta = z\,, \end{cases} \tag{4.20}$$

deren Stetigkeitsbeweis wir im 4. Schritt nachtragen, definieren wir die nach Hilfssatz 4.6.3 holomorphe Funktion

$$h_D(z) = \int_\gamma g(\zeta, z)\, d\zeta\,, \quad h_D : D \to \mathbb{C}\,. \tag{4.21}$$

Wegen (4.11) ist die zu beweisende Identität (4.19) dann gleichwertig mit

$$h_D(z) = 0 \quad \text{für alle } z \in D\,. \tag{4.22}$$

2. Schritt (Fortsetzung von h_D zu einer ganzen Funktion $h_{\mathbb{C}}$): Wir definieren zunächst die Hilfsfunktion

$$h_E(z) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,, \quad h_E : \operatorname{Ext}\gamma \to \mathbb{C}\,,$$

deren Holomorphie sich aus dem Hilfssatz 4.6.3 ergibt. Da für alle $z \in \operatorname{Ext}\gamma$ die Beziehung $\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = 0$ gilt, folgt aufgrund von (4.20) und (4.21)

$$h_D(z) = h_E(z) \quad \text{für alle } z \in D \cap \operatorname{Ext}\gamma\,.$$

Da die Voraussetzung (a) besagt, dass $\operatorname{Int}\gamma \subset D$ gilt, hat die Beziehung (4.14) zu Folge, dass $D \cup \operatorname{Ext}\gamma$ ganz $\mathbb{C}$ ist. Daher wird die Funktion h_D durch die Festsetzung

$$h_{\mathbb{C}}(z) := \begin{cases} h_D(z) & \text{für } z \in D\,, \\ h_E(z) & \text{für } z \in \operatorname{Ext}\gamma \end{cases}$$

zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion $h_{\mathbb{C}}$ fortgesetzt.

3. Schritt (Nachweis, dass $h_{\mathbb{C}}$ identisch verschwindet): Da es ein $r > 0$ gibt mit $\operatorname{Int}\gamma \subset U_r(0)$, stimmen $h_{\mathbb{C}}(z)$ und $h_E(z)$ außerhalb von $U_r(0)$ überein. Daher gibt es ein $t_0 \in [a, b]$, sodass folgende Abschätzung für alle $|z| > r$ gilt:

$$|h_{\mathbb{C}}(z)| = |h_E(z)| \overset{(3.10)}{\leq} L(\gamma) \max_{t \in [a,b]} \frac{|f(\gamma(t))|}{|\gamma(t) - z|} = L(\gamma) \frac{|f(\gamma(t_0))|}{|\gamma(t_0) - z|}\,. \tag{4.23}$$

Für alle $|z| > 2r$ gilt dann $|\gamma(t_0) - z| \geq |z| - |\gamma(t_0)| > 2r - r = r$, und das bedeutet, dass $h_{\mathbb{C}}$ für alle $|z| > 2r$ und folglich auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt ist. Nach dem Satz von Liouville ist $h_{\mathbb{C}}$ dann konstant, und da die rechte Seite von (4.23) für $|z| \to \infty$ gegen 0 strebt, ist $h_{\mathbb{C}}$ identisch 0.

Wie eingangs erwähnt, ist damit – bis auf den Nachweis der Stetigkeit der Funktion (4.20) – der Beweis der Implikation $(a) \Rightarrow (c)$ und damit des Satzes 4.6.2 abgeschlossen. Es bleibt also noch der

4. Schritt (Nachweis der Stetigkeit von $g(\zeta, z)$): Da die Stetigkeit von $g(\zeta, z)$ in jedem Punkt $(\zeta, z) \in D \times D$ mit $\zeta \neq z$ offensichtlich ist, brauchen wir nur noch die Punkte der Form $(z, z) \in D \times D$ zu untersuchen. Sei also (z_0, z_0) ein solcher Punkt und $r > 0$ so gewählt, dass $U_r(z_0) \subseteq D$ gilt. Für alle $(\zeta, z) \in U_r(z_0) \times U_r(z_0)$ gilt dann (siehe Satz 3.3.1 und Korollar 3.3.2)

$$\begin{aligned} \int_{[z,\zeta]} \big[f'(\eta) - f'(z_0) \big]\, d\eta &= f(\zeta) - f(z) - f'(z_0)(\zeta - z) \\ &= \big[g(\zeta, z) - g(z_0, z_0) \big] (\zeta - z)\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit der Integralabschätzung (3.10)

$$\big| g(\zeta, z) - g(z_0, z_0) \big| \leq \frac{1}{|\zeta - z|} \left| \int_{[z,\zeta]} \big[f'(\eta) - f'(z_0) \big]\, d\eta \right| \leq \max_{\eta \in [z,\zeta]} \big| f'(\eta) - f'(z_0) \big|\,,$$

und die rechte Seite dieser Ungleichung strebt wegen der Stetigkeit von f' für $(\zeta, z) \to (z_0, z_0)$ gegen 0. ■

Neben den im Hauptsatz 4.6.2 der Cauchy-Theorie beschriebenen Verallgemeinerungen der Ergebnisse des Abschnitts 3.4 gilt jetzt auch die folgende Verallgemeinerung der Cauchy'schen Integralformel (4.2) für Ableitungen: Ist $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $\gamma : [a, b] \to D$ ein geschlossener, bezüglich D nullhomologer Weg, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ (Übungsaufgabe)

$$\boxed{w_\gamma(z)\, f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \quad \text{für alle } z \in D \setminus \gamma([a, b])}\,. \tag{4.24}$$

Nachdem die Umlaufzahl auf analytischem Wege eingeführt wurde, besteht jetzt das Bedürfnis, diesen geometrisch anmutenden Begriff zu veranschaulichen. Zu diesem Zweck führen wir folgende Bezeichnungen ein. Sind $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{C}$ zwei Wege mit $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, so bezeichnen wir mit $\gamma_1 + \gamma_2 : [a, c] \to \mathbb{C}$ den Weg, der auf $[a, b]$ mit γ_1 und auf $[b, c]$ mit γ_2 übereinstimmt. Entsprechend werden „Summen" von mehr als zwei Wegen gebildet. Ferner bezeichnen wir für einen Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit $-\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ den Weg, der die Menge $\gamma([a, b])$ in umgekehrter Richtung durchläuft, d.h., es gilt

$-\gamma(t) = \gamma(a+b-t)$. Unter der „Differenz" $\gamma_1 - \gamma_2$ zweier Wege verstehen wir schließlich die „Summe" von γ_1 und $-\gamma_2$.

Aufgrund einschlägiger Rechenregeln für Kurvenintegrale (Folgerung 3.1.1 und Satz 3.2.6) gilt für zwei geschlossene Wege γ_1 und γ_2

$$\boxed{w_{\gamma_1+\gamma_2}(z) = w_{\gamma_1}(z) + w_{\gamma_2}(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus \big(\gamma_1([a,b]) \cup \gamma_2([b,c])\big). \tag{4.25}$$

Entsprechend gilt für einen einzelnen geschlossenen Weg γ

$$\boxed{w_{-\gamma}(z) \;=\; -\,w_\gamma(z)} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \setminus (\gamma([a,b])\,. \tag{4.26}$$

Wir wollen nun erklären, wie man auf anschauliche Weise die Werte der Umlaufzahl eines geschlossenen Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ in den einzelnen Zusammenhangskomponenten der Menge $\mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$ bestimmen kann. Wir wählen dazu einen beliebigen Punkt z_0 auf der Kurve, der kein „Kreuzungspunkt" ist, zu dem es also nur ein $t_0 \in [a,b]$ gibt mit $\gamma(t_0) = z_0$. Als Nächstes wählen wir um z_0 eine Kreisscheibe $U_\rho(z_0)$ mit der Eigenschaft, dass der in $U_\rho(z_0)$ liegende Teil der Kurve γ, den wir mit γ_0 bezeichnen, die Kreisscheibe disjunkt in drei Teile zerlegt (siehe Abbildung), nämlich den (bezüglich der Orientierung der Kurve) „linken" Teil U_ℓ, das von γ_0 gebildete Kurvenstück, und den mit U_r bezeichneten „rechten" Teil. Wir behaupten nun, dass die Umlaufzahl in U_ℓ um 1 größer ist als in U_r, d.h.,

$$w_\gamma(z_\ell) \;=\; w_\gamma(z_r) + 1 \quad \text{für alle } z_\ell \in U_\ell\,,\; z_r \in U_r\,. \tag{4.27}$$

Zur Begründung zerlegen wir die Kurve γ so in zwei Teile, dass $\gamma = \gamma_1 + \gamma_0$ gilt. Ferner bezeichnen wir den im Anfangspunkt von γ_0 beginnenden und im Endpunkt von γ_0 endenden, positiv orientierten Teilweg von $S_\rho(z_0)$ mit κ_r, und den entsprechend negativ orientierten Teilweg mit κ_ℓ. Bezeichnen wir zudem mit γ_r bzw. γ_ℓ die geschlossenen „Umwege" $\gamma_r := \kappa_r + \gamma_1$ bzw. $\gamma_\ell := \kappa_\ell + \gamma_1$, so gilt

$$w_\gamma(z_\ell) \;=\; w_{\gamma_r}(z_\ell) \quad \text{und} \quad w_\gamma(z_r) \;=\; w_{\gamma_\ell}(z_r)\,, \tag{4.28}$$

denn wegen $z_\ell \in \operatorname{Ext}(\gamma_0 - \kappa_r)$ gilt zunächst $w_{\gamma_0-\kappa_r}(z_\ell) = 0$ und damit

$$\begin{aligned} w_\gamma(z_\ell) \;&=\; w_{\gamma_0+\gamma_1}(z_\ell) \;=\; w_{\gamma_0-\kappa_r+\kappa_r+\gamma_1}(z_\ell) \\ &=\; w_{\gamma_0-\kappa_r}(z_\ell) + w_{\kappa_r+\gamma_1}(z_\ell) \;=\; w_{\gamma_r}(z_\ell)\,. \end{aligned}$$

Die zweite Beziehung in (4.28) zeigt man analog. Des Weiteren gilt

$$w_{\gamma_r}(z_\ell) \;=\; w_{\gamma_r}(z_r)\,, \tag{4.29}$$

denn z_ℓ und z_r liegen in der gleichen Zusammenhangskomponente der von γ_r erzeugten Zerlegung von $\mathbb{C}$. Schließlich gilt noch

$$w_{\gamma_r}(z_r) \;=\; w_{\gamma_\ell}(z_r) + 1\,, \tag{4.30}$$

denn wegen Satz 3.2.8 gilt $w_{\kappa_r - \kappa_\ell}(z_r) = 1$ und damit

$$\begin{aligned} w_{\gamma_r}(z_r) \;&=\; w_{\kappa_r + \gamma_1}(z_r) \;=\; w_{\kappa_r - \kappa_l + \kappa_l + \gamma_1}(z_r) \\ &=\; w_{\kappa_r - \kappa_l}(z_r) + w_{\kappa_l + \gamma_1}(z_r) \;=\; 1 + w_{\gamma_\ell}(z_r)\,. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir dann

$$w_\gamma(z_\ell) \overset{(4.28)}{=} w_{\gamma_r}(z_\ell) \overset{(4.29)}{=} w_{\gamma_r}(z_r) \overset{(4.30)}{=} w_{\gamma_\ell}(z_r) + 1 \overset{(4.28)}{=} w_\gamma(z_r) + 1\,.$$

Damit ist die zu beweisende Identität (4.27) nachgewiesen.

Als **Merkregel** zur Bestimmung der Umlaufzahl einer geschlossenen Kurve für nicht auf dieser Kurve liegende Punkte gilt **„rechts vor links“**: Überquert man die als „Einbahnstraße“ betrachtete Kurve so, dass der „Verkehr“ auf der Kurve von links kommt, so erhöht sich die Umlaufzahl um 1, kommt der „Verkehr“ dagegen von rechts, so erniedrigt sie sich um 1 (siehe Abbildungen).

Aufgaben

1. Für das Innere $\operatorname{Int}\gamma$ und Äußere $\operatorname{Ext}\gamma$ eines geschlossenen Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ zeige man:
   (a) $\operatorname{Int}\gamma$ ist offen und beschränkt,
   (b) $\operatorname{Ext}\gamma$ ist offen und unbeschränkt,
   (c) $\partial\operatorname{Int}\gamma \subseteq \gamma([a,b])$ und $\partial\operatorname{Ext}\gamma \subseteq \gamma([a,b])$,
   (d) $\gamma([a,b]) \subseteq U_r(0) \implies \operatorname{Int}\gamma \subseteq U_r(0)$ und $\mathbb{C}\setminus U_r(0) \subseteq \operatorname{Ext}\gamma$.
2. Zeigen Sie: Ist $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $\gamma : [a,b] \to D$ ein geschlossener nullhomologer Weg, so gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$
$$w_\gamma(z)\, f^{(k)}(z) \;=\; \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\,d\zeta \quad \text{für alle } z \in D \setminus \gamma([a,b])\,.$$
3. Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ein geschlossener Weg und $f_n(z) := z^n$ für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie die Beziehung
$$w_{f_n\circ\gamma}(0) \;=\; n\, w_\gamma(0)\,.$$
4. Gegeben sei der mit Hilfe zweier C^1-Funktionen $\omega : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $r : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ auf einem Intervall $[a,b]$ definierte Weg $\gamma(t) := r(t)\exp(2\pi i\omega(t))$. Beweisen Sie die Formel
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} \;=\; \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{r(b)}{r(a)} + \omega(b) - \omega(a)\,,$$
und geben Sie damit eine geometrische Interpretation der Umlaufzahl.

5 Isolierte Singularitäten

Nachdem wir im vorherigen Kapitel holomorphe Funktionen hauptsächlich im Inneren ihres Definitions untersucht haben, wenden wir uns jetzt ihrem Verhalten am Rande zu, insbesondere in der Nähe isolierter Randpunkte. Im Gegensatz zum Reellen lassen sich diese so genannten isolierten Singularitäten im komplexen Kontext in einfacher Weise klassifizieren und im Rahmen einer eleganten Theorie untersuchen. Neben weit in die Funktionentheorie reichenden Anwendungen dieser Theorie liefern einige Ergebnisse auch Berechnungsmöglichkeiten für uneigentliche Integrale und Reihensummen der reellen Analysis.

5.1 Grundlegende Eigenschaften

Das Studium holomorpher Funktionen in der Nähe isolierter Randpunkte ihres Definitionsbereichs basiert auf folgenden Begriffsbildungen.

5.1.1 Definition: *Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit der Eigenschaft, dass es einen Punkt $z_0 \in \mathbb{C} \setminus D$ mit einer punktierten Umgebung $\dot{U}_r(z_0) \subseteq D$ gibt. Ein solcher Punkt heißt* ***isolierte Singularität*** *von f. Speziell nennt man ihn*

(a) ***hebbare Singularität****, wenn $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existiert,*

(b) ***Pol****, wenn $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$ gilt,*

(c) ***wesentliche Singularität****, wenn er weder hebbar noch ein Pol ist.*

Augenscheinlich liefert diese Definition eine vollständige Klassifikation der isolierten Singularitäten, d.h., jede solche Singularität ist entweder hebbar, oder ein Pol, oder wesentlich. Für eine Veranschaulichung der drei möglichen Typen isolierter Singularitäten verweisen wir auf die Abbildung.

5.1.2 Beispiele: Die für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ definierte Funktion

$$\frac{z^2-1}{z-1} \quad \text{hat bei 1 eine hebbare Singularität}\,,$$

denn sie besitzt wegen $(z^2-1)/(z-1) = z+1$ für $z \to 1$ den Grenzwert 2. Die zur vorherigen reziproke , für alle $z \neq \pm 1$ definierte, Funktion

$$\frac{z-1}{z^2-1} \quad \text{hat bei } -1 \text{ einen Pol und bei } 1 \text{ eine hebbare Singularität},$$

denn wegen $(z-1)/(z^2-1) = 1/(z+1)$ strebt der Betrag dieser Funktion für $z \to -1$ gegen ∞, während die Funktion bei 1 den Grenzwert $1/2$ besitzt.

Als Nächstes betrachten wir drei aus naiver Sicht sehr ähnliche, dem Wesen nach aber grundverschiedene Funktionen. In folgender Übersicht ergibt sich der jeweilige Holomorphiebereich sofort aus der Tatsache, dass der Sinus nur an den ganzzahligen Vielfachen von π verschwindet:

$$\frac{1}{\sin z} \quad \text{hat Pole bei } k\pi \text{ für alle } k \in \mathbb{Z},$$

$$\sin\frac{1}{z} \quad \text{hat eine wesentliche Singularität bei } 0,$$

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{z}} \quad \text{hat keine isolierte Singularität bei } 0.$$

Die Aussage zur ersten Funktion ist aufgrund der Verteilung der Nullstellen des Sinus offensichtlich. Die Singularität 0 der zweiten Funktion ist isoliert und wesentlich, da die Funktion $\sin 1/z$ für $z \to 0$ nicht konvergiert, und auch der Betrag dieser Funktion für $z \to 0$ nicht gegen ∞ strebt. Die Singularität 0 der dritten Funktion ist schließlich noch nicht einmal isoliert, denn sie ist Häufungspunkt der Menge der isolierten Singularitäten $1/k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ◊

Unser nächstes Ziel ist es, für die drei Typen isolierter Singularitäten jeweils alternative Charakterisierungen anzugeben. In diesem Zusammenhang erweist sich die Redewendung, eine Funktion f sei **beschränkt in der Nähe** einer isolierten Singularität z_0, wenn es eine punktierte Umgebung $\dot{U}_r(z_0)$ von z_0 gibt, in der f beschränkt ist.

5.1.3 Satz (Charakterisierungen hebbarer Singularitäten) : *Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, und $z_0 \in \mathbb{C}$ sei eine isolierte Singularität von f. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *z_0 ist hebbare Singularität von f, d.h., es existiert $\lim_{z \to z_0} f(z)$.*

(b) *Es gilt $\lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = 0$.*

(c) *f ist nach $\{z_0\}$ stetig fortsetzbar.*

(d) *f ist nach $\{z_0\}$ holomorph fortsetzbar.*

(e) *f ist in der Nähe von z_0 beschränkt.*

Beweis: Da nach dem Fortsetzungssatz 4.3.1, angewandt auf die einpunktige Menge $A := \{z_0\}$, die Aussagen (b) bis (e) äquivalent sind, genügt es festzustellen, dass (a) offensichtlich hinreichend für (b) und notwendig für (c) ist. ∎

Ist z_0 eine isolierte Singularität einer Funktion f, die nicht hebbar ist, so ist $f(z)$ bei Annäherung von z an z_0 nicht beschränkt. Es stellt sich daher die Frage, ob es vielleicht eine natürliche Zahl n gibt, sodass das Produkt $(z-z_0)^n f(z)$ in der Nähe von z_0 beschränkt ist. Dass dies in der Tat zutrifft, und dass man anhand dieser Überlegung die Pole weiter klassifizieren kann, besagt der folgende Satz.

5.1.4 Satz und Definition (Klassifikation von Polen): *Ist z_0 ein Pol einer holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, so existiert die natürliche Zahl*

$$n := \min\{\, k \in \mathbb{N} : (z-z_0)^k f(z) \text{ ist in der Nähe von } z_0 \text{ beschränkt}\}\,.$$

*Sie heißt **Ordnung** oder **Vielfachheit** des Pols z_0, und z_0 heißt **n-facher** Pol, oder auch Pol **n-ter Ordnung**.*

Beweis: Aus der Voraussetzung, dass f bei z_0 einen Pol besitzt, folgt die Existenz einer punktierten Kreisscheibe $\dot{U}_r(z_0) \subseteq D$, in der f nullstellenfrei ist. Daher ist $1/f$ in $\dot{U}_r(z_0)$ holomorph. Ferner gilt $\lim_{z\to z_0} 1/f(z) = 0$. Nach Satz 5.1.3 besitzt $1/f$ dann eine in $U_r(z_0)$ holomorphe Fortsetzung h. Da h nicht identisch verschwindet und bei z_0 eine Nullstelle besitzt, gibt es ein eindeutig bestimmtes $n \in \mathbb{N}$ (die Vielfachheit der Nullstelle z_0) und eine holomorphe Funktion

$$g : U_r(z_0) \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \;\; h(z) = (z-z_0)^n g(z) \;\; \text{und} \;\; g(z_0) \neq 0\,.$$

Wählen wir nun eine Kreisscheibe $U_s(z_0)$ mit $0 < s \leq r$, auf der g keine Nullstelle besitzt, so gilt

$$f(z) \;=\; \frac{1}{h(z)} \;=\; \frac{1}{(z-z_0)^n g(z)} \quad \text{für alle } \; z \in \dot{U}_s(z_0)\,.$$

Für die in $\dot{U}_s(z_0)$ definierten und holomorphen Funktionen

$$f_k(z) \;:=\; (z-z_0)^k f(z) \;=\; \frac{(z-z_0)^{k-n}}{g(z)}\,, \quad k \in \mathbb{N}$$

gilt dann: Für jedes $k \geq n \geq 1$ ist $f_k(z)$ in der Nähe von z_0 beschränkt, während im Fall $n \geq 2$ jede der Funktionen $f_1(z), \ldots, f_{n-1}(z)$ bei Annäherung von z an z_0 unbeschränkt ist. ∎

Wie der vorherige Beweis zeigt, ist ein n-facher Pol einer Funktion f eine n-fache Nullstelle der reziproken Funktion $1/f$, und umgekehrt. Diese für den Umgang mit Polen zentrale Eigenschaft ist Teil der Aussagen des folgenden Satzes.

5.1.5 Satz (Charakterisierungen von Polen n-ter Ordnung): *Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, und $z_0 \in \mathbb{C}$ sei eine isolierte Singularität von f. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *z_0 ist ein Pol n-ter Ordnung von f, d.h., n ist die kleinste natürliche Zahl, sodass $(z-z_0)^n f(z)$ in der Nähe von z_0 beschränkt ist.*

(b) *Es gibt eine holomorphe Funktion $g : D \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit $g(z_0) \neq 0$ und*

$$f(z) \;=\; \frac{g(z)}{(z-z_0)^n} \quad \text{für alle } z \in D\,.$$

(c) *Es gibt eine holomorphe Funktion $h : U_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit einer Nullstelle n-ter Ordnung im Punkt z_0 und folgender Eigenschaft: h ist in $\dot{U}_r(z_0)$ nullstellenfrei, und es gilt*

$$f(z) \;=\; \frac{1}{h(z)} \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_r(z_0)\,.$$

(d) *Es gibt eine punktierte Kreisscheibe $\dot{U}_r(z_0) \subseteq D$ und positive Konstanten m und M mit folgender Eigenschaft:*

$$\frac{m}{|z-z_0|^n} \;\leq\; \big|f(z)\big| \;\leq\; \frac{M}{|z-z_0|^n} \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_r(z_0)\,.$$

Beweis: Wir beweisen der Reihe nach $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (a)$.

$\underline{(a) \Rightarrow (b)}$: Da $(z-z_0)^n f(z)$ in der Nähe von z_0 beschränkt ist, gibt es nach Satz 5.1.3 eine holomorphe Funktion $g : D \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit

$$g(z) \;=\; (z-z_0)^n f(z) \quad \text{für alle } z \in D\,.$$

Um die noch ausstehende Beziehung $g(z_0) \neq 0$ zu zeigen, nehmen wir an, es sei $g(z_0) = 0$. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $\widetilde{g} : D \cup \{z_0\} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = (z-z_0)\,\widetilde{g}(z)$ und folglich

$$\widetilde{g}(z) \;=\; (z-z_0)^{n-1} f(z) \quad \text{für alle } z \in D\,.$$

Das bedeutet, dass die Funktion $(z-z_0)^{n-1} f(z)$ in der Nähe von z_0 beschränkt ist, im Widerspruch zur Minimalität von n.

(b) ⇒ (c): Wegen $g(z_0) \neq 0$ ist g in einer Kreisscheibe $U_r(z_0) \subseteq D \cup \{z_0\}$ nullstellenfrei, und daher leistet die auf $U_r(z_0)$ holomorphe Funktion $h(z) := (z-z_0)^n/g(z)$ das Gewünschte.

(c) ⇒ (d): Wir wählen eine kompakte Kreisscheibe $\overline{U_s(z_0)} \subset U_r(z_0)$ derart, dass $h(z) = (z-z_0)^n g(z)$ für alle $z \in \overline{U_s(z_0)}$ gilt mit einer nullstellenfreien Funktion $g(z)$. Setzen wir dann

$$m := \min_{z \in \overline{U_s(z_0)}} \frac{1}{|g(z)|} > 0\,, \quad M := \max_{z \in \overline{U_s(z_0)}} \frac{1}{|g(z)|} > 0\,,$$

so folgt die behauptete Ungleichung aus der für alle $z \in \overline{U_s(z_0)}$ gültigen Identität

$$\big|f(z)\big| = \frac{1}{|h(z)|} = \frac{1}{|z-z_0|^n}\,\frac{1}{|g(z)|}\,.$$

(d) ⇒ (a): Aus der für alle $z \in \dot{U}_r(z_0)$ gültigen Beziehung $|(z-z_0)^n f(z)| \leq M$ folgt sofort, dass die Funktion $(z-z_0)^n f(z)$ in der Nähe von z_0 beschränkt ist. Auf der anderen Seite ist wegen $|(z-z_0)^{n-1} f(z)| \geq m\,|z-z_0|^{-1}$ die Funktion $(z-z_0)^{n-1} f(z)$ bei Annäherung von z an z_0 nicht beschränkt. ■

Nachdem wir in den Sätzen 5.1.3 und 5.1.5 zahlreiche notwendige und hinreichende Bedingungen für hebbare Singularitäten bzw. Pole angegeben haben, bleiben noch die wesentlichen Singularitäten. Diese werden im folgenden Satz behandelt, der wie der Satz 4.5.6 über das Verhalten ganz-transzendenter Funktionen auch nach **Casorati-Weierstraß** benannt wird.

5.1.6 Satz (Charakterisierungen wesentlicher Singularitäten): *Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, und $z_0 \in \mathbb{C}$ sei eine isolierte Singularität von f. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *z_0 ist eine wesentliche Singularität, d.h., weder hebbar noch Pol.*

(b) *Das Bild $f(\dot{U}_r(z_0))$ jeder punktierten Kreisscheibe $\dot{U}_r(z_0) \subseteq D$ liegt dicht in $\mathbb{C}$.*

(c) *Es gibt eine gegen z_0 konvergierende Folge von Punkten $z_k \in D$, für die der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} f(z_k)$ nicht existiert, und für die auch die Beziehung $\lim_{k\to\infty} |f(z_k)| = \infty$ nicht gilt.*

Beweis: Da die Implikationen $(b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$ trivial sind, bleibt nur $(a) \Rightarrow (b)$ zu zeigen. Wir nehmen an, (b) gelte nicht. Dann existiert eine punktierte Umgebung $\dot{U}_r(z_0) \subseteq D$, sodass $f(\dot{U}_r(z_0))$ nicht dicht in $\mathbb{C}$ ist. Folglich gibt es eine Kreisscheibe $U_s(b)$ in $\mathbb{C}$ mit $f(\dot{U}_r(z_0)) \cap U_s(b) = \emptyset$, d.h.

$$|f(z) - b| \geq s \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_r(z_0)\,.$$

Daher ist die Funktion

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - b}\,, \quad g : \dot{U}_r(z_0) \to \mathbb{C}$$

holomorph, und sie hat, da sie beschränkt ist, nach Satz 5.1.3 eine hebbare Singularität im Punkt z_0. Also existiert der Grenzwert $\lim_{z\to z_0} g(z)$. Dann hat aber die Funktion

$$f(z) = b + \frac{1}{g(z)}\,, \quad f : \dot{U}_r(z_0) \to \mathbb{C}\,,$$

je nachdem ob der Grenzwert $\lim_{z\to z_0} g(z)$ gleich 0 ist oder nicht, einen Pol oder eine hebbare Singularität im Punkt z_0. In jedem Fall erhalten wir also einen Widerspruch. ■

5.1.7 Beispiel: Die holomorphe Funktion

$$f(z) := \exp\left(\frac{1}{z}\right), \quad f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

hat im Nullpunkt eine wesentliche Singularität. Am einfachsten erkennt man dies an den beiden reellen Grenzwerten

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} e^k = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} f\left(-\frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} e^{-k} = 0\,,$$

die zeigen, dass 0 weder eine hebbare Singularität noch ein Pol ist. Wir können jedoch auch die im Satz 5.1.6 beschriebene Eigenschaft, dass jede komplexe Zahl der Grenzwert einer geeigneten Folge von Funktionswerten ist, und zwar in einer besonders bemerkenswerten Form, direkt nachprüfen. Für jedes $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt nämlich (siehe (1.18) und (1.19))

$$f\left(\frac{1}{\ln|w| + i\arg w + 2k\pi i}\right) = \exp\big(\ln|w|\big)\exp\big(i\arg w\big)\exp\big(2k\pi i\big) = w\,,$$

und das besagt, dass w nicht nur der Grenzwert einer Folge $f(z_k)$ mit $z_k \to 0$ für $k \to \infty$ ist, sondern dass w in jeder Umgebung von 0 (sogar unendlich oft) als Wert angenommen wird. ◊

Das im vorherigen Beispiel gezeigte Phänomen, dass in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität jeder bis auf höchstens einen Wert (im Beispiel die 0) tatsächlich angenommen wird, ist ein allgemein gültiger Sachverhalt (Satz von Picard), der gegebenenfalls im zweiten Teil dieser Vorlesung bewiesen wird.

Aufgaben

1. Zeigen Sie: Ist $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und z_0 ein Pol n-ter Ordnung von f, so gibt es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen $b_1, \ldots, b_n$ mit $b_n \neq 0$ und eine eindeutig bestimmte holomorphe Funktion $\widetilde{f} : D \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) \;=\; \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \frac{b_{n-1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \ldots + \frac{b_1}{z-z_0} + \widetilde{f}(z) \qquad \text{für alle } z \in D\,.$$

Formulieren und beweisen Sie auch die Umkehrung dieser Aussage.

2. Zeigen Sie: Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann ganz-transzendent, wenn die durch

$$f^*(z) \;:=\; f\Big(\frac{1}{z}\Big)\,, \quad f^* : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$$

definierte Funktion im Nullpunkt eine wesentliche Singularität hat.

Hinweis: Verwenden Sie die vorherige Aufgabe.

5.2 Laurent-Reihen

Nachdem sich die Entwicklung von holomorphen Funktionen in Potenzreihen um Punkte ihres Holomorphiebereichs als sehr nützlich erwiesen hat, stellt sich die Frage, ob sich holomorphe Funktionen auch um isolierte Singularitäten in Funktionenreihen entwickeln lassen. Dass Potenzreihen, also Reihen mit Reihengliedern der Form $c_k\,(z-z_0)^k$, hierfür nicht ausreichen, ist offensichtlich, denn die Grenzfunktionen von Potenzreihen sind im Entwicklungsmittelpunkt stets holomorph. Dass aber die Hinzunahme von Reihengliedern der Form $d_k\,(z-z_0)^{-k}$ völlig ausreicht, wollen wir nun zeigen.

Um mit Funktionenreihen der gewünschten Form vernünftig arbeiten zu können, führen wir für komplexe Zahlen c_{-k}, $k \in \mathbb{N}$, die nahe liegende Bezeichnung

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k\,(z-z_0)^k := \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k}\,(z-z_0)^{-k} \tag{5.1}$$

ein, wobei wir mit dem links stehenden Symbol sowohl die rechts stehende Reihe als auch ihre Grenzfunktion bezeichnen.

5.2.1 Definition: *Die mit Hilfe einer komplexen Zahl a und einer Menge $\{c_k \in \mathbb{C} : k \in \mathbb{Z}\}$ komplexer* ***Koeffizienten*** *gebildete Summe von Reihen*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,(z-a)^k := \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k\,(z-a)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(z-a)^k \tag{5.2}$$

heißt ***Laurent-Reihe*** *mit* ***Entwicklungsmittelpunkt*** *a. Ferner nennt man die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k\,(z-a)^k$ den* ***Hauptteil*** *und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,(z-a)^k$ den* ***Nebenteil*** *der Laurent-Reihe (5.2).*

Während der Nebenteil einer Laurent-Reihe offensichtlich eine gewöhnliche Potenzreihe ist, ist der Hauptteil eine Reihe in Potenzen von $(z-a)^{-1}$. Im Hinblick auf das Konvergenzverhalten einer Laurent-Reihe ist daher klar, dass der Nebenteil auf einer Kreisscheibe $U_r(a)$ (nämlich der Konvergenzkreisscheibe) konvergiert, und zwar absolut und kompakt. Auf der anderen Seite ist vom Hauptteil wegen der speziellen Form seiner Reihenglieder zu erwarten, dass er auf dem Komplement einer kompakten Kreisscheibe $\overline{U_s(a)}$ konvergiert. Als Konvergenzbereich einer Laurent-Reihe erwarten wir also eine Menge der Form $U_r(a) \setminus \overline{U_s(a)}$, die wir für den Fall, dass sie nichtleer und offen ist, mit

$$R_{r,s}(a) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z-a| < s\}\,, \quad \text{wobei} \;\; 0 \le r < s \le \infty\,, \tag{5.3}$$

bezeichnen und **Kreisring** mit **Innenradius** r und **Außenradius** s nennen.

Im folgenden Satz präzisieren wir das zuvor plausibel gemachte Konvergenzverhalten von Laurent-Reihen.

5.2.2 Satz (Konvergenz von Laurent-Reihen): *Gegeben sei eine Laurent-Reihe* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k$ *und die aus deren Koeffizienten* c_k *gebildeten „reellen Zahlen“*

$$\rho := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_{-k}|} \quad \textit{und} \quad \sigma := \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}\,,$$

wobei für ρ *und* σ *auch die uneigentlichen Werte* 0 *und* ∞ *zugelassen sind.*

Die Laurent-Reihe hat dann folgendes Konvergenzverhalten:

(a) *Im Fall* $\rho < \sigma$ *ist sie auf dem Kreisring* $R_{\rho,\sigma}(a)$ *absolut und kompakt konvergent. Für alle Punkte des Komplements von* $\overline{R_{\rho,\sigma}(a)}$ *ist sie divergent, und für die Punkte am Rand von* $R_{\rho,\sigma}(a)$ *ist keine allgemein gültige Aussage möglich.*

(b) *Im Fall* $\rho = \sigma$ *ist sie für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z| \neq \rho$ *divergent, für die* z *mit* $|z| = \rho$ *ist keine allgemein gültige Aussage möglich.*

(c) *Im Fall* $\rho > \sigma$ *ist für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *Haupt- oder Nebenteil divergent.*

Beweis: Wir stellen zunächst fest, dass σ der Konvergenzradius des Nebenteils $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$ der betrachteten Laurent-Reihe ist, und $1/\rho$ der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} w^k$. Folglich gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \quad \text{ist konvergent für } |z-a| < \sigma\,, \text{ divergent für } |z-a| > \sigma\,,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \Big(\frac{1}{z-a}\Big)^k \quad \text{ist konvergent für } \frac{1}{|z-a|} < \frac{1}{\rho}\,, \text{ divergent für } \frac{1}{|z-a|} > \frac{1}{\rho}\,,$$

wobei die Konvergenz jeweils für absolute und kompakte Konvergenz steht. Unter Beachtung von (5.1) lässt sich die zweite Aussage umformen zu

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-a)^k \quad \text{ist konvergent für } |z-a| > \rho\,, \text{ divergent für } |z-a| < \rho\,.$$

Damit lassen sich nun alle Aussagen des Satzes, außer denen bezüglich des Verhaltens auf den Kreisen $S_\rho(a)$ und $S_\sigma(a)$ (siehe Übungsaufgabe), leicht herleiten.

(a) Im Fall $\rho < \sigma$ ist die Menge $R_{\rho,\sigma}(a) = U_\sigma(a) \backslash \overline{U_\rho(a)}$ ein offener Kreisring, auf dem Haupt- und Nebenteil der betrachteten Laurent-Reihe absolut und kompakt konvergent sind. In der Kreisscheibe $U_\rho(a)$ ist der Nebenteil konvergent und der Hauptteil divergent, und im Komplement von $\overline{U_\sigma}(a)$ ist es genau umgekehrt.

(b) Im Fall $\rho = \sigma$ entartet der Kreisring $R_{\rho,\sigma}(a)$ zum Kreis $S_\rho(a)$, und wie im vorherigen Fall konvergiert im Innengebiet nur der Nebenteil und im Außengebiet nur der Hauptteil. In jedem Fall liegt für $|z| \neq \rho$ also Divergenz der Laurent-Reihe vor.

(c) Im Fall $\rho > \sigma$ schließlich ist in jedem $z \in \mathbb{C}$ entweder der Neben- oder der Hauptteil divergent, oder beide. ■

Wir kommen nun zum zentralen Ergebnis dieses Abschnitts, das besagt, dass sich jede in einem Kreisring holomorphe Funktionen in eine eindeutig bestimmte Laurent-Reihe entwickeln lässt. Beachtet man dabei, dass punktierte Umgebungen spezielle Kreisringe sind, nämlich solche mit verschwindendem Innenradius, so sehen wir mit dem folgenden Satz die eingangs gestellt Frage beantwortet.

5.2.3 Satz (über die Entwicklung holomorpher Funktionen in Laurent-Reihen): *Jede in einem Kreisring $R_{r,s}(a)$ holomorphe Funktion $f(z)$ lässt sich um a in eine Laurent-Reihe entwickeln, die in $R_{r,s}(a)$ kompakt und absolut konvergiert. Die Koeffizienten c_k der Darstellung*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k \quad \text{für alle } z \in R_{r,s}(a) \tag{5.4}$$

sind eindeutig bestimmt, und sie besitzen die Darstellungen

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\tau(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}}\, d\zeta \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}\,, \tag{5.5}$$

wobei τ beliebig mit $r < \tau < s$ gewählt werden kann.

Beweis: Die Idee des Beweises ist, die Funktion $f(z)$ zunächst mit Hilfe der Cauchy'schen Integralformel als Summe von zwei Integralen zu schreiben, dann deren Integranden in bekannter Weise als Reihen zu entwickeln, und schließlich die Reihensummen und Integrale zu vertauschen. Um dieses Programm – mit den erforderlichen technischen Einzelheiten – in fünf Schritten durchzuführen, betrachten wir ein fortan festgehaltenes $z \in R_{r,s}(a)$.

1. Schritt (Additive Zerlegung von $f(z)$): Wir wählen reelle ρ und σ derart, dass $r < \rho < \sigma < s$ und $z \in R_{\rho,\sigma}(a)$ gilt. Der mit Γ bezeichnete, aus der Abbildung ersichtliche, geschlossenen Weg $S_\sigma(a) + \gamma - S_\rho(a) - \gamma$ ist dann nullhomolog in

$R_{r,s}(a)$, und es gilt $w_\Gamma(z) = 1$. Mit der Integralformel (4.19) impliziert dies

$$f(z) \overset{4.6.2}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\sigma(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \;-\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta\,. \tag{5.6}$$

Dass die rechte Seite der Beziehung (5.6) gerade der Zerlegung von $f(z)$ in Haupt- und Nebenteil entspricht, zeigen wir als Nächstes.

2. Schritt (Reihenentwicklung von $\frac{1}{2\pi i}\int_{S_\sigma(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$): Wie im Beweis des Satzes 3.2.8 verwenden wir die für alle $\zeta \in S_\sigma(a)$ gültige Identität (siehe (3.14))

$$\frac{1}{\zeta - z} \;=\; \frac{1}{\zeta - a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\zeta - a}\right)^k, \tag{5.7}$$

bei der die Reihe bekanntlich gleichmäßig bezüglich $\zeta \in S_\sigma(a)$ konvergiert. Damit gilt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\sigma(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta &\overset{(5.7)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\sigma(a)} \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - a}{\zeta - a}\right)^k \right] d\zeta \\ &\overset{3.2.5}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\sigma(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}}\, d\zeta \right] (z - a)^k. \end{aligned} \tag{5.8}$$

3. Schritt (Reihenentwicklung von $\frac{1}{2\pi i}\int_{S_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$): Indem wir jetzt die für alle $\zeta \in S_\rho(a)$ gültige Identität (siehe (3.14))

$$\frac{1}{\zeta - z} \;=\; \frac{1}{a - z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - a}{z - a}\right)^k \tag{5.9}$$

verwenden, bei der wieder gleichmäßige Konvergenz bezüglich $\zeta \in S_\rho(a)$ vorliegt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta &\overset{(5.9)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\rho(a)} \left[\frac{f(\zeta)}{a - z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - a}{z - a}\right)^k \right] d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\rho(a)} \left[\frac{f(\zeta)}{a - z} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\zeta - a}{z - a}\right)^{k-1} \right] d\zeta \\ &\overset{3.2.5}{=} -\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\rho(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{1-k}}\, d\zeta \right] (z - a)^{-k} \end{aligned} \tag{5.10}$$

4. Schritt (Herleitung von (5.4) und (5.5)): Um von (5.6) mit Hilfe von (5.8) und (5.10) auf die zu beweisenden Beziehungen (5.4) und (5.5) schließen zu können, genügt es zu zeigen – wenn man noch (5.1) beachtet –, dass sich der Wert des Integrals $\int_{S_\tau(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\, d\zeta$ nicht ändert, wenn τ im offenen Intervall (r,s) variiert, d.h., wenn Folgendes gilt:

$$\int\limits_{S_{\tau_1}(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\, d\zeta \;=\; \int\limits_{S_{\tau_2}(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}}\, d\zeta \quad \text{für alle } \tau_1, \tau_2 \in (r,s)\,.$$

Dass dies richtig ist, genauer, dass die Differenz der betrachteten Integrale verschwindet, folgt sofort, wenn man analog zum ersten Beweisschritt längs des in der Abbildung gezeigten geschlossenen Weges $S_{\tau_1} - \gamma - S_{\tau_2} + \gamma$ integriert und beachtet, dass das Integral verschwindet, da dieser Integrationsweg bezüglich des Kreisrings $R_{r,s}(a)$ nullhomolog ist.

5. Schritt (Eindeutigkeit der Koeffizienten): Ist $\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k(z-a)^k$ eine weitere Laurent-Reihe, die in $R_{r,s}(a)$ die Funktion $f(z)$ darstellt, so gilt für beliebiges $\tau \in (r,s)$, wenn man – wie im 2. und 3. Schritt – beachtet, dass die auftretende Laurent-Reihe bezüglich $\zeta \in S_\tau(a)$ gleichmäßig konvergiert,

$$\begin{aligned} c_n &\overset{(5.5)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\tau(a)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\, d\zeta \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\tau(a)} \Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k\, (\zeta-a)^{k-n-1} \Big]\, d\zeta \\ &\overset{3.2.5}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k \Big[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{S_\tau(a)} (\zeta-a)^{k-n-1} \Big]\, d\zeta \overset{(3.8)}{=} d_n\,. \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis des Satzes 5.2.3 abgeschlossen. ■

Der Satz 5.2.3 liefert in Form der Beziehung (5.5) eine Formel zur Berechnung der Koeffizienten der Laurent-Entwicklung einer auf einem Kreisring holomorphen Funktion. In konkreten Fällen ist es jedoch meist vorteilhafter, anstelle dieser Formel bekannte Taylor-Entwicklungen zur Bestimmung der Laurent-Koeffizienten heranzuziehen, wie etwa die der geometrischen Reihe oder der Exponentialreihe.

5.2.4 Beispiele: Die für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} = R_{0,\infty}(0)$ holomorphe Funktion $z^2 \exp(1/z)$ besitzt um den Nullpunkt die Laurent-Entwicklung

$$z^2 \exp\Big(\frac{1}{z}\Big) \;=\; z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Big(\frac{1}{z}\Big)^k \;=\; \sum_{k=-2}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!}\, z^{-k} \;=\; \sum_{k=-\infty}^{2} \frac{1}{(2-k)!}\, z^k\,.$$

Damit sind alle Laurent-Koeffizienten von $z^2 \exp(1/z)$ bestimmt, insbesondere die Integrale

$$\int_{S_\tau(0)} \zeta^{1-k} e^{\frac{1}{\zeta}}\, d\zeta \quad k \in \mathbb{Z}\,,\;\; \tau > 0\,.$$

Die für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ holomorphe Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

besitzt bei 0 und 1 jeweils eine isolierte Singularität. Dies führt in kanonischer Weise auf vier Kreisringe und die zugehörigen Laurent-Entwicklungen:

$$\begin{aligned}
R_{0,1}(0): \quad f(z) &= -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty} z^k = -\sum_{k=-1}^{\infty} z^k\,,\\
R_{1,\infty}(0): \quad f(z) &= \frac{1}{z}\,\frac{1}{z(1-\frac{1}{z})} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k=-\infty}^{-2} z^k\,,\\
R_{0,1}(1): \quad f(z) &= \frac{1}{z-1}\,\frac{1}{1-(z-1)} = \frac{1}{z-1}\sum_{k=0}^{\infty}(z-1)^k = \sum_{k=-1}^{\infty}(z-1)^k\,,\\
R_{1,\infty}(1): \quad f(z) &= \frac{1}{z-1}\,\frac{1}{(z-1)(1-\frac{1}{1-z})} = \sum_{k=-\infty}^{-2}(-1)^k(z-1)^k\,.
\end{aligned}$$

Augenscheinlich bezieht sich die im Satz 5.2.3 beschriebene Eindeutigkeit der Laurent-Koeffizienten einer Funktion nicht auf die Funktion als Ganzes, sondern nur auf ihre Einschränkung auf den jeweils betrachteten Kreisring. $\Diamond$

Als Nächstes halten wir zwei einfache Aussagen über Laurent-Entwicklungen holomorpher Funktionen fest, die sich leicht aus dem Satz 5.2.3 bzw. seinem Beweis ergeben.

5.2.5 Korollar 1 (zu Satz 5.2.3): *Für den Haupt- und Nebenteil der Laurent-Reihe einer in einem Kreisring $R_{r,s}(a)$ holomorphen Funktion gilt:*

(a) *der Nebenteil konvergiert absolut und kompakt in $U_s(a)$,*

(b) *der Hauptteil konvergiert absolut und kompakt in $\mathbb{C} \setminus \overline{U_r(a)}$.*

Beweis: Im 2. Schritt des Beweises von Satz 5.2.3 werden von σ nur die Bedingungen $z \in U_\sigma(a)$ und $\sigma < s$ benötigt. Daher gilt die dortige Aussage zum Nebenteil für jedes $z \in U_s(a)$.

Entsprechend wird im 3. Schritt nur $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{U_\rho(a)}$ und $r < \rho$ verwendet, sodass die Aussage zum Hauptteil für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{U_r(a)}$ gilt. $\blacksquare$

Dass für die Koeffizienten von Laurent-Reihen Abschätzungen gelten, die die für Taylor-Reihen bekannten Cauchy'schen Abschätzungen (vgl. Satz 4.1.5) verallgemeinern, besagt der folgende Satz.

5.2.6 Korollar 2 (zu Satz 5.2.3): *Es sei* $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-a)^k$ *die Laurent-Entwicklung einer in einem Kreisring* $R_{r,s}(a)$ *holomorphen Funktion* $f(z)$. *Dann gelten für alle* $\tau \in (r,s)$ *die* ***Cauchy'schen Abschätzungen***

$$|c_k| \leq \tau^{-k} \max_{\zeta \in S_\tau(a)} |f(\zeta)| \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}\,. \tag{5.11}$$

Beweis: Die Abschätzungen (5.11) folgen unmittelbar durch Anwendung der Integralabschätzung (3.10) auf die Integralformel (5.5). ■

Da punktierte Kreisscheiben spezielle Kreisringe (mit Innenradius 0) sind, lassen sich die zuvor erzielten Ergebnisse über Laurent-Reihen auch zur Untersuchung isolierter Singularitäten verwenden. Der folgende Satz zeigt, inwiefern man auf diesem Wege die verschiedenen Typen von isolierten Singularitäten auf besonders elegante Weise charakterisieren kann.

5.2.7 Satz (Charakterisierung isolierter Singularitäten mit Hilfe von Laurent-Reihen): *Ist* $f: D \to \mathbb{C}$ *eine holomorphe Funktion mit der Laurent-Entwicklung*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$$

in einer punktierten Umgebung einer isolierten Singularität z_0, *so ist* z_0

(a) *eine hebbare Singularität* $\iff c_k = 0$ *für alle* $k < 0$,

(b) *ein Pol der Ordnung* $n \iff c_{-n} \neq 0$ *und* $c_k = 0$ *für alle* $k < -n$,

(c) *eine wesentliche Singularität* $\iff c_k \neq 0$ *für unendlich viele* $k < 0$.

Beweis: (a) Ist z_0 hebbar, so ist f nach Satz 5.1.3 in der Nähe von z_0 beschränkt. Zusammen mit der Cauchy'schen Abschätzung (5.11) besagt dies, dass es ein positives M gibt, sodass für jedes $k \in \mathbb{Z}$ die Abschätzung

$$|c_k| \leq \tau^{-k} M \qquad \text{für alle hinreichend kleinen } \tau > 0$$

gilt. Dies impliziert $c_k = 0$ für alle negativen k.

Gilt umgekehrt $c_k = 0$ für alle negativen k, so ist die gegebene Laurent-Reihe eine Taylor-Reihe, folglich existiert der Grenzwert $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, d.h., z_0 ist hebbar.

(b) Ist z_0 ein Pol der Ordnung n, so gilt nach Satz 5.1.5 in einer punktierten Kreisscheibe $\dot{U}_r(z_0)$ eine Beziehung der Form $f(z) = (z-z_0)^{-n} g(z)$ mit einer in $U_r(z_0)$ holomorphen Funktion $g(z)$ mit $g(z_0) \neq 0$. Ist dann $\sum_{k=0}^{\infty} d_k(z-z_0)^k$ die Taylor-Reihe von $g(z)$ um z_0, so gilt für alle $z \in \dot{U}_r(z_0)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(z-z_0)^{k-n} = \sum_{k=-n}^{\infty} d_{k+n}(z-z_0)^k .$$

Wegen der Eindeutigkeit der Koeffizienten der Laurent-Entwicklung folgt damit $c_{-n} = d_0 \neq 0$ und $c_k = 0$ für alle $k < -n$.

Hat umgekehrt die gegebene Laurent-Reihe die Form $\sum_{k=-n}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ mit $c_{-n} \neq 0$, so beschreibt die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_{k-n}(z-z_0)^k$ eine in $U_r(z_0)$ holomorphe Funktion $g(z)$ mit $g(z_0) \neq 0$, und es gilt

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n} \quad \text{für alle } z \in \dot{U}_r(z_0) .$$

Nach Satz 5.1.5 ist z_0 dann ein Pol n-ter Ordnung.

(c) Zur Charakterisierung der wesentlichen Singularitäten verbleibt aus Gründen der Logik nur die angegebene Bedingung. ■

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die Konvergenzbereiche folgender Laurent-Reihen:

$$(a) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-|k|} z^k , \qquad (b) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^k}{3^k+1} , \qquad (c) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{z^k}{e^{\alpha k}+e^{-\alpha k}} , \quad \alpha \in \mathbb{R} .$$

2. Bestimmen Sie für folgende Funktionen die Laurent-Reihe im jeweils angegebenen Kreisring:

(a) $\dfrac{3}{(z+1)(z-2)}$, $\quad 1 < |z| < 2$,

(b) $\left(\dfrac{z-z_0}{z-a}\right)^2$, $\quad |z-z_0| > |a-z_0|$,

(c) $\dfrac{z^2-1}{z^2+1}$, $\quad |z-1| > \sqrt{2}$.

5.3 Der Residuensatz

Das Ziel dieses Abschnitts ist eine weitere Verallgemeinerung des Cauchy'schen Integralsatzes. Um die in diesem Zusammenhang zentrale Begriffsbildung zu motivieren, erinnern wir daran, dass man eine in einer punktierten Umgebung einer isolierten Singularität holomorphe Funktion als Laurent-Reihe darstellen und diese aufgrund ihrer kompakten Konvergenz gliedweise integrieren kann. Es gilt daher, wenn wir noch die Integralformel (3.8) beachten,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_\rho(z_0)}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,(z-z_0)^k\Big]\,dz \;=\; c_{-1}$$

für alle hinreichend kleinen $\rho > 0$. Das „Überbleibsel" c_{-1} der Koeffizienten der betrachteten Laurent-Reihe spielt augenscheinlich eine besondere Rolle. Für eine holomorphe Funktion $f : \dot{U}_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit der Laurent-Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ setzen wir daher

$$\mathrm{Res}_{z_0} f \;:=\; c_{-1} \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{S_\rho(z_0)} f(z)\,dz \quad \text{für } \rho \in (0,r) \tag{5.12}$$

und nennen diese komplexe Zahl das **Residuum** von f im Punkt z_0. Man beachte, dass wir in dieser Beziehung die bekannte Integraldarstellung (5.5) des Laurent-Koeffizienten c_{-1} bereits mitverwendet haben.

Das zentrale Ergebnis dieses Abschnitts ist der folgende Satz, der – wie wir bald sehen werden – neben weit reichenden Anwendungen in der Funktionentheorie auch bemerkenswerte Rückwirkungen auf die reelle Analysis hat, die zu Ergebnissen führen, die in einem rein reellen Kontext nur mit großer Mühe oder überhaupt nicht zu erzielen wären.

5.3.1 Satz (Residuensatz): *Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und γ ein geschlossener Weg in D mit isolierten Singularitäten von f im Inneren. Ist dann $\{z_1, \ldots, z_n\}$ die Gesamtheit dieser Singularitäten, und ist γ nullhomolog bezüglich $D \cup \{z_1, \ldots, z_n\}$, so gilt die **Residuenformel***

$$\int_\gamma f(z)\,dz \;=\; 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} w_\gamma(z_\nu)\,\mathrm{Res}_{z_\nu} f\,. \tag{5.13}$$

Dass dieser Satz den allgemeinen Cauchy'schen Integralsatz – genauer, die Implikation $(a) \Rightarrow (b)$ im Satz 4.6.2 – nochmals verallgemeinert, erkennt man, wenn man im Innern von γ nur hebbare Singularitäten zulässt und beachtet, dass das Residuum einer hebbaren Singularität (wegen des fehlenden Hauptteils der zugehörigen Laurent-Entwicklung) stets verschwindet.

Beweis von Satz 5.3.1: Der Beweis beruht auf der Idee, die Funktion $f(z)$ so zu einer Funktion $\widehat{f}(z)$ modifizieren, dass die Singularitäten $z_1, \ldots, z_n$ hebbar werden, und dann auf die holomorphe Fortsetzung $\widetilde{f}$ von $\widehat{f}$ nach $D \cup \{z_1, \ldots, z_n\}$ den Cauchy'schen Integralsatz anzuwenden.

Um dies zu realisieren, bezeichnen wir für jedes $\nu = 1, \ldots, n$ mit $f_\nu(z)$ den Hauptteil der Laurent-Entwicklung von $f(z)$ um z_ν. Nach Korollar 5.2.5 (mit $r = 0$) ist dann $f_\nu(z)$ in $\mathbb{C} \backslash \{z_\nu\}$ holomorph, und folglich sind für die modifizierte Funktion

$$\widehat{f}(z) := f(z) - f_1(z) - \ldots - f_n(z) , \quad \widehat{f} : D \to \mathbb{C} ,$$

die Singularitäten $z_1, \ldots, z_n$ hebbar, denn keine ihrer Laurent-Entwicklungen besitzt einen Hauptteil. Für die $\widetilde{f}$ genannte holomorphe Fortsetzung von $\widehat{f}$ nach $D \cup \{z_1, \ldots, z_n\}$ gilt dann $\int_\gamma \widetilde{f}(z)\, dz = 0$ nach dem Cauchy'schen Integralsatz 4.6.2. Da $\widetilde{f}$ und $\widehat{f}$ in D identisch sind, impliziert dies $\int_\gamma \widehat{f}(z)\, dz = 0$ und damit

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{\nu=1}^{n} \int_\gamma f_\nu(z)\, dz . \tag{5.14}$$

Um den Beweis zu beenden, führen wir für die Hauptteile $f_\nu(z)$ die Bezeichnung

$$f_\nu(z) := \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k^{(\nu)} (z - z_\nu)^k , \quad f_\nu : \mathbb{C} \setminus \{z_\nu\}$$

ein und beachten, dass jede dieser Reihen auf dem Bild der Kurve γ gleichmäßig konvergiert und daher gliedweise integriert werden darf. Da zudem jede der Funktionen $(z - z_\nu)^k$ mit $k \leq -2$ auf $\mathbb{C} \setminus \{z_\nu\}$ eine Stammfunktion und somit ein längs γ verschwindendes Integral besitzt, erhalten wir

$$\int_\gamma f_\nu(z)\, dz = c_{-1}^{(\nu)} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_\nu} \overset{(4.11)}{=} c_{-1}^{(\nu)} \cdot 2\pi i w_\gamma(z_\nu) \overset{(5.12)}{=} \operatorname{Res}_{z_\nu} f \cdot 2\pi i w_\gamma(z_\nu)$$

für jedes $\nu = 1, \ldots, n$. Zusammen mit (5.14) ist damit der Beweis erbracht. ■

5.3.2 Beispiel: Wir stellen uns die Aufgabe, das Integral

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^4 + 1}$$

zu berechnen, wobei γ den positiv orientierten Rand der Menge $U_2(0) \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ parametrisiert. Um den Residuensatz anwenden zu können, stellen wir fest, dass der Integrand vier isolierte Singularitäten besitzt, nämlich die Wurzeln von -1 (siehe Satz 1.1.4)

$$z_\nu := e^{(2\nu-1)\pi i/4} , \quad \nu = 1, \ldots, 4 ,$$

und dass von diesen die ersten beiden im Inneren des betrachteten Integrationsweges liegen. Aufgrund des Residuensatzes 5.3.1 wissen wir dann zwar, dass

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \big(\operatorname{Res}_{z_1} f + \operatorname{Res}_{z_2} f\big)$$

gilt, wenn wir mit $f(z)$ die Funktion $\frac{1}{z^4+1}$ bezeichnen, die Bestimmung der hierbei auftretenden Residuen bleibt aber ein Problem, das – nach unserem gegenwärtigen Kenntnisstand – die Berechnung von zwei Integralen oder zwei Laurent-Koeffizienten erfordert. Bevor wir dies tatsächlich tun, stellen wir eine Überlegung an, die zeigt, dass es auch einfacher geht. $\Diamond$

Dass man in bestimmten, häufig auftretenden Fällen Residuen auf einfache Weise, d.h., ohne Laurent-Entwicklungen oder Integrationen, berechnen kann, besagt der folgende Satz.

5.3.3 Satz (Formeln zur Berechnung von Residuen): *Es sei z_0 eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$. Dann gilt:*

(a) Ist z_0 eine hebbare Singularität, so gilt $\boxed{\operatorname{Res}_{z_0} f = 0}$.

(b) Ist z_0 ein Pol erster Ordnung, so gilt $\boxed{\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\, f(z)}$.

(c) Ist z_0 ein Pol der Ordnung n, so gilt $\boxed{\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z\to z_0} \frac{h^{(n-1)}(z)}{(n-1)!}}$,
wobei $h(z) := (z-z_0)^n f(z)$.

Beweis: Die Aussage (a) ist offensichtlich, denn nach Satz 5.2.7 verschwinden bei einer hebbaren Singularität alle c_k mit $k < 0$. Die Aussage (b) ein Spezialfall von (c), und so bleibt nur noch (c) zu zeigen.

Wir bezeichnen mit $\sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ die Laurent-Entwicklung von f im Pol n-ter Ordnung z_0. Dann ist die in einer punktierten Umgebung von z_0 holomorphe Funktion

$$h(z) = (z-z_0)^n f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z-z_0)^{k+n} = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k-n} (z-z_0)^k$$

nach z_0 holomorph fortsetzbar, und sie besitzt die $(n-1)$-te Ableitung

$$h^{(n-1)}(z) = \sum_{k=n-1}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+2)\, c_{k-n} (z-z_0)^{k-n+1} .$$

Folglich gilt $\lim_{z\to z_0} h^{(n-1)}(z) = (n-1)!\, c_{-1} = (n-1)! \operatorname{Res}_{z_0} f$. ■

5.3.4 Beispiel: Die für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$ holomorphe Funktion

$$f(z) := \frac{(z+1)\, e^z}{z\,(z-1)\,(z^2-1)}$$

hat (beachte $z^2 - 1 = (z+1)(z-1)$) bei -1 eine hebbare Singularität, bei 0 einen einfachen und bei 1 einen zweifachen Pol. Folglich gilt nach Satz 5.3.3 (a) und (b) zunächst

$$\mathrm{Res}_{-1} f = 0\,, \quad \mathrm{Res}_0 f = \lim_{z \to 0} \frac{(z+1)\, e^z}{(z-1)(z^2-1)} = 1\,.$$

Um das Residuum bei 1 zu bestimmen, setzen wir $h(z) := (z-1)^2 f(z) = e^z/z$ und berechnen die Ableitung $h'(z) = (z-1)\, e^z/z^2$. Mit Teil (c) von Satz 5.3.3 gilt dann

$$\mathrm{Res}_1 f = \lim_{z \to 1} h'(z) = \lim_{z \to 1} \frac{(z-1)\, e^z}{z^2} = 0\,.$$

Dieses Ergebnis zeigt im Übrigen, dass ein Residuum natürlich auch dann verschwinden kann, wenn die betrachtete Singularität nicht hebbar ist. $\Diamond$

Häufig sind die zu integrierenden Funktionen Quotienten zweier Funktionen mit einer gemeinsamen Nullstelle. Um diese Situation zu beleuchten, betrachten wir zwei holomorphe Funktionen g und h, die beide bei z_0 eine Nullstelle haben, und zwar g eine mit der Vielfachheit $n \in \mathbb{N}_0$, und h eine mit der Vielfachheit $n + m \geq n$. Die Funktion g/h hat dann bei z_0 einen Pol der Ordnung m, und daher eine Laurent-Entwicklung der Form

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k\, (z - z_0)^k\,.$$

Um das Residuum c_{-1} zu berechnen, entwickeln wir $g(z)$ und $h(z)$ in eine Taylor-Reihe um z_0 und erhalten die Beziehung

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}\, (z - z_0)^k = \Big[\sum_{k=n+m}^{\infty} \frac{h^{(k)}(z_0)}{k!}\, (z - z_0)^k \Big] \Big[\sum_{k=-m}^{\infty} c_k\, (z - z_0)^k \Big]\,.$$

Hieraus lässt sich – unter Verwendung des Cauchy-Produkts auf der rechten Seite – der Koeffizient c_{-1} in eindeutiger Weise mit Hilfe der Ableitungen von g und h an der Stelle z_0 bestimmen. Im Fall $m = 1$ führt dies für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$ auf die einfache Formel

$$\boxed{\mathrm{Res}_{z_0} \frac{g}{h} = (n+1)\, \frac{g^{(n)}(z_0)}{h^{(n+1)}(z_0)}}\,, \tag{5.15}$$

denn für die Koeffizienten der Potenz $(z - z_0)^n$ gilt $\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{h^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}\, c_{-1}\,.$

5.3.5 Beispiel: Wir greifen nochmals das im Beispiel 5.3.2 gestellte Integrationsproblem auf, indem wir die dort erzielte Beziehung

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \big(\operatorname{Res}_{z_1} f + \operatorname{Res}_{z_2} f \big)$$

auswerten, in der $z_1 = e^{\pi i/4}$ und $z_2 = e^{3\pi i/4}$ die beiden im Inneren des Integrationsweges liegenden einfachen Pole des mit $f(z)$ bezeichneten Integranden sind. Setzen wir dann $g(z) := 1$ und $h(z) := z^4 + 1$, so liefert die Formel (5.15) mit $n = 0$ und $h'(z) = 4z^3$ die Beziehungen

$$\operatorname{Res}_{z_1} f = \frac{1}{4e^{3\pi i/4}} = \frac{e^{-3\pi i/4}}{4} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} \;, \quad \operatorname{Res}_{z_2} f = \frac{1}{4e^{9\pi i/4}} = \frac{e^{-\pi i/4}}{4} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \,.$$

Damit gilt schließlich

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \, \frac{-2i}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \,. \qquad \Diamond$$

Anders als bei den Polen gibt es für die Berechnung von Residuen in wesentlichen Singularitäten keine Formeln. Wie man unter Umständen dennoch das Residuum berechnen kann, zeigt das folgende Beispiel.

5.3.6 Beispiel: Die Funktion $f(z) := \exp(z + {}^1\!/_z)$ besitzt im Nullpunkt eine wesentliche Singularität. Sie lässt sich mit Hilfe des Cauchy-Produkts wie folgt in eine Laurent-Reihe entwickeln:

$$e^{z+\frac{1}{z}} = e^z \, e^{\frac{1}{z}} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \Big) \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \, z^k} \Big) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j! \, (k-j)!} z^{k-2j} \Big) \,.$$

Um den Koeffizienten der Potenz z^{-1} zu finden, müssen wir alle Indexpaare $(k, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ berücksichtigen, für die $k - 2j = -1$ gilt. Wir erhalten der Reihe nach $(1,1)$, $(3,2)$, $(5,3)$, $(7,4)$ usw. Damit gilt schließlich

$$\operatorname{Res}_0 f = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j! \, (j-1)!} \,. \qquad \Diamond$$

Aufgaben

1. Berechnen Sie

$$\int\limits_{S_{1/2}(1)} \frac{e^z}{(1-z)^3} \, dz \;, \quad \int\limits_{S_{1/2}(0)} \frac{dz}{z(1-z)^3} \;, \quad \int\limits_{S_{1/2}(0)} \frac{e^z}{z(1-z)^3} \, dz \,.$$

2. Imitieren Sie den Beweis des Residuensatzes zum Nachweis von

$$\int\limits_{S_2(0)} \frac{dz}{z^2(z^2+2z+2)} = 0\,.$$

3. Zeigen Sie für die nachfolgend definierte Funktion $f(z) = h(z)\frac{g'(z)}{g(z)-b}$:

(a) Sind $g, h : D \to \mathbb{C}$ holomorph, und ist $z_0 \in D$ eine b-Stelle der Vielfachheit n von g, so gilt

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = n \cdot h(z_0)\,.$$

(b) Ist $h : D \to \mathbb{C}$ holomorph, und hat die holomorphe Funktion $g : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ einen Pol der Ordnung m in z_0, so gilt

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = m \cdot h(z_0)\,.$$

5.4 Anwendungen in der reellen Analysis

Der im vorherigen Abschnitt behandelte Residuensatz leistet, wie wir noch sehen werden, einen wichtigen Beitrag zum weiteren Ausbau der Funktionentheorie. Dass er aber auch interessante und praktisch verwertbare Rückschlüsse auf die *reelle* Analysis liefert, sieht man ihm auf den ersten Blick nicht an. Um dies näher zu beschreiben, führen wir zunächst für bestimmte komplexe Funktionen den Begriff des **uneigentlichen Integrals** (im Riemann'schen Sinne) ein,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;:=\; \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\,dx \;+\; i\int_{-\infty}^{\infty} v(x,0)\,dx\,. \tag{5.16}$$

Hierbei ist $f : D \to \mathbb{C}$ eine auf einer offenen Umgebung D der reellen Zahlengerade stetige Funktion und $(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die zugehörige reelle Darstellung, d.h., $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$.

Eine ganze Klasse von Funktionen, für die das Integral (5.16) existiert, beschreibt der folgende Satz.

5.4.1 Satz (Berechnung uneigentlicher Integrale): *Gegeben sei eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, deren Definitionsbereich ganz $\mathbb{C}$ ist mit Ausnahme endlich vieler Pole, von denen keiner auf der reellen Achse liegt. Gibt es dann Konstante $M \geq 0$, $R \geq 0$ und $\alpha > 1$ mit der Eigenschaft*

$$\bigl|f(z)\bigr| \;\leq\; \frac{M}{|z|^{\alpha}} \quad \text{für alle } |z| \geq R\,, \tag{5.17}$$

so existiert das folgende Integral, und hat den Wert

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;=\; 2\pi i\sum_{\nu=1}^{n}\mathrm{Res}_{z_\nu} f \;=\; -2\pi i\sum_{\mu=1}^{m}\mathrm{Res}_{w_\mu} f\,,$$

wobei $z_1,\ldots,z_n$ die Pole in der oberen Halbebene sind und $w_1,\ldots,w_m$ die in der unteren.

Beweis: Die Existenz des Integrals folgt sofort aus (5.17), denn hiernach ist $M\,|x|^{-\alpha}$ für $|x| \geq R$ eine integrierbare Majorante für $|u(x,0)|$ und $|v(x,0)|$.

Wir wählen $r > R$ so groß, dass die Pole $z_1,\ldots,z_n$ im Inneren des positiv orientierten Halbkreises γ_r (siehe Abbildung) liegen. Nach dem Residuensatz gilt dann

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz \;=\; 2\pi i\sum_{\nu=1}^{n}\mathrm{Res}_{z_\nu} f\,.$$

Da andererseits aber auch

$$\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = \int_{-r}^{r} f(x)\,dx + \int_0^{\pi} f(re^{it})\,ire^{it}\,dt$$

gilt, genügt es zu zeigen, dass das letzte Integral für $r \to \infty$ verschwindet. Dies folgt wegen $\alpha > 1$ sofort aus der Abschätzung

$$\Big| \int_0^{\pi} f(re^{it})\,ire^{it}\,dt \Big| \le \pi \frac{M}{r^\alpha}\, r = \frac{\pi M}{r^{\alpha-1}} \,.$$

Die Aussage bezüglich der unteren Halbebene ergibt sich hierzu analog. Das negative Vorzeichen rührt dabei daher, dass man spiegelbildlich zur reellen Achse vorgeht und daher die Orientierung der Integrationswege umkehrt. ■

Ein Blick auf die Voraussetzungen des vorherigen Satzes, insbesondere die Abschätzung (5.17), wirft die Frage auf, welche Funktionen diese Voraussetzungen erfüllen. Dass das für rationale Funktionen ohne reelle Pole immer dann zutrifft, wenn der Grad des Nennerpolynoms um mindestens 2 größer ist als der des Zählerpolynoms, ergibt sich aus folgendem Satz.

5.4.2 Satz (Wachstum rationaler Funktionen): *Sind $p(z)$ und $q(z)$ Polynome vom Grad n_p bzw. n_q, so gibt es positive Zahlen m, M, R mit*

$$m\,|z|^{n_p - n_q} \le \left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \le M\,|z|^{n_p - n_q} \quad \text{für alle } |z| \ge R\,.$$

Beweis: Nach Satz 4.5.3 gibt es positive Zahlen m_1, m_2, M_1, M_2, R, sodass

$$\left.\begin{aligned} m_1\,|z|^{n_p} &\le \big|p(z)\big| \le M_1\,|z|^{n_p} \\ m_2\,|z|^{n_q} &\le \big|q(z)\big| \le M_2\,|z|^{n_q} \end{aligned}\right\} \quad \text{für alle } |z| \ge R\,.$$

Daher leisten $m := m_1/M_2$ und $M := M_1/m_2$ das Gewünschte. ■

5.4.3 Beispiel: Die rationale Funktion $f(z) := 1/(z^4+1)$ besitzt keinen reellen Pol, und der Grad des Nennerpolynoms ist um 4 größer als der des Zählerpolynoms. Daher können wir den Satz 5.4.1 anwenden und erhalten, da wir die Residuen der beiden Pole in der oberen Halbebene bereits im Beispiel 5.3.5 berechnet haben,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\,.$$

◊

Neben der *Aussage* des Satzes 5.4.1 ist auch sein *Beweis* von Interesse. Erfüllt nämlich ein vorgegebenes Problem nicht alle Voraussetzungen des Satzes, so kann man immerhin noch versuchen, den Beweis an die vorliegende Situation anzupassen. Wir demonstrieren dies anhand eines Beispiels, das für die Integrationstheorie besondere Bedeutung besitzt. Es handelt sich um das in der Literatur meistbenutzte Beispiel einer Funktion, die integrierbar ist im Sinne des uneigentlichen Riemann-Integrals, aber nicht im – ansonsten überlegenen – Lebesgue'schen Sinne.

5.4.4 Beispiel: Um mit funktionentheoretischen Mitteln zu zeigen, dass die reelle Beziehung

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx \;=\; \frac{\pi}{2} \tag{5.18}$$

gilt, betrachten wir die meromorphe Funktion

$$f(z) \;:=\; \frac{e^{iz}}{z}\,, \quad f:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$$

mit dem Ziel, sie in geeigneter Weise zu integrieren. Da diese Funktion aber eine Singularität auf der reellen Achse besitzt, nämlich einen einfachen Pol bei 0, und zudem die Voraussetzung (5.17) des Satzes 5.4.1 nicht erfüllt ist, können wir diesen Satz nicht unmittelbar anwenden. Um jedoch seinen Beweis zu imitieren, modifizieren wir den Integrationsweg in der in der Abbildung gezeigte Form durch Einfügen eines kleinen Umwegs um den Nullpunkt. Nach dem Residuensatz gilt dann, da der einfache Pol 0 nach Satz 5.3.3 (b) wegen $\lim_{z\to 0} zf(z) = 1$ das Residuum 1 hat, für alle $0 < r < R$

$$2\pi i \;=\; \int_{\gamma_{r,R}} f(z)\,dz \;=\; \sum_{k=1}^{4}\int_{\gamma_{r,R}^{(k)}} f(z)\,dz\,. \tag{5.19}$$

Die vier Teilwege separat betrachtend, gilt zunächst für den großen Halbkreis

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\gamma_{r,R}^{(1)}}\frac{e^{iz}}{z}\,dz\Big| \;&=\; \Big|\,i\int_0^\pi e^{iR(\cos t+i\sin t)}\,dt\Big| \;\le\; \int_0^\pi e^{-R\sin t}\,dt \;\le\\ \le\; \int_0^\pi e^{-Rt}\,dt \;&=\; \frac{1}{R}\big(1-e^{-R\pi}\big) \;\longrightarrow 0 \quad \text{für } R\to\infty\,.\end{aligned}$$

Die beiden geradlinigen Teilwege fassen wir zusammen. Für sie gilt

$$\begin{aligned}&\int_{\gamma_{r,R}^{(2)}}\frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{\gamma_{r,R}^{(4)}}\frac{e^{iz}}{z}\,dz \;=\; \int_{-R}^{-r}\frac{e^{ix}}{x}\,dx + \int_r^R\frac{e^{ix}}{x}\,dx \;=\\ &=\; -\int_r^R\frac{e^{-ix}}{x}\,dx + \int_r^R\frac{e^{ix}}{x}\,dx \;=\; \int_r^R\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}\,dx \;=\; 2i\int_r^R\frac{\sin x}{x}\,dx\,.\end{aligned}$$

Für den kleinen Halbkreis erhalten wir schließlich

$$\int_{\gamma_{r,R}^{(3)}} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_{\gamma_{r,R}^{(3)}} \frac{dz}{z}\,dz + \int_{\gamma_{r,R}^{(3)}} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz \overset{(3.9)}{=} \pi i + \int_{\gamma_{r,R}^{(3)}} \frac{e^{iz}-1}{z}\,dz\,.$$

Dieser Ausdruck strebt für $r \to 0$ gegen πi, denn das Integral auf der rechten Seite ist betragsmäßig höchstens so groß wie die reelle Zahl $\max_{|z|=r} |e^{iz}-1|\,\pi$, und diese verschwindet für $r \to 0$.

Die Ergebnisse der vorherigen Rechnungen zusammenfassend erkennen wir, dass die rechte Seite der Beziehung (5.19) für $r \to 0$ und $R \to \infty$ gegen

$$2i \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx + \pi i$$

strebt. Daraus folgt die zu beweisende Beziehung (5.18). ◊

Wir ändern nun ein wenig die Blickrichtung, indem wir von uneigentlichen Integralen zu Reihen wechseln. Da zwischen diesen Gegenständen der reellen Analysis bekanntlich ein enger Zusammenhang besteht – man denke nur an das Integralkriterium für Reihen –, ist es nicht verwunderlich, dass man den Residuensatz auch zur Berechnung von Reihensummen einsetzen kann. Wie der folgende Satz zeigt, sind die Voraussetzungen denen des Satzes 5.4.1 für Integrale weit gehend analog. Die Aussage dagegen hat eine eher überraschende Form.

5.4.5 Satz (Berechnung von Reihensummen): *Gegeben sei eine holomorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, deren Definitionsbereich ganz $\mathbb{C}$ ist mit Ausnahme endlich vieler Pole $z_1, \ldots, z_n$, von denen keiner ganzzahlig ist. Gibt es dann Konstante $M \geq 0$, $R \geq 0$ und $\alpha > 1$ mit der Eigenschaft*

$$\big|f(z)\big| \leq \frac{M}{|z|^\alpha} \quad \text{für alle } |z| \geq R\,, \tag{5.20}$$

so existiert die folgende Reihensumme, und hat den Wert

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = -\sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_\nu} F\,, \quad \text{wobei } F(z) := f(z)\cdot \pi\cot \pi z\,.$$

Der Beweis dieses Satzes ist dem des entsprechenden Satzes 5.4.1 für Integrale ähnlich, aber etwas aufwendiger. Zudem ist das Auftreten des Cotangens nicht unmittelbar einsichtig, aber nach dem Motto „Der Zweck heiligt die Mittel“ bedient man sich hier der Funktion $f(z)\cdot\pi\cot\pi z$, da sie an jeder ganzen Zahl k eine einfachen Pol mit dem Residuum $f(k)$ hat.

Beweis des Satzes 5.4.5: Die Konvergenz der betrachteten Reihe folgt sofort aus (5.20), denn danach ist die Reihe mit den Reihengliedern $M\,k^{-\alpha}$ für $|k| \geq R$ eine konvergente Majorante für die beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ und $\sum_{k=1}^{\infty} f(-k)$. Das weitere Vorgehen erfolgt in zwei Schritten: der erste beschreibt, wie der Residuensatz zur Anwendung kommt, der zweite ist technischer Art.

(a) Wir wählen eine natürliche Zahl N so groß, dass alle Pole von f im Inneren des Weges Γ_N liegen, der den positiv orientierten Rand des achsenparallelen Quadrats mit den Ecken $(N+\frac{1}{2})(\pm 1 \pm i)$ beschreibt (siehe Abbildung). Da die Funktion $F(z)$ neben den Polen $z_1, \ldots, z_n$ auch an den ganzen Zahlen Singularitäten hat, gilt nach dem Residuensatz 5.3.1

$$\int\limits_{\Gamma_N} F(z)\,dz \;=\; 2\pi i \Big[\sum_{k=-N}^{N} \operatorname{Res}_k F \;+ \sum_{\nu=1}^{n} \operatorname{Res}_{z_\nu} F \Big]\,. \tag{5.21}$$

Die ganzen Zahlen sind einfache Pole von $\cot \pi z$ und damit von $F(z)$. Nach der Formel (5.15) gilt daher, wenn wir dort $n = 0$, $g(z) := f(z)\pi \cos \pi z$ und $h(z) := \sin \pi z$ setzen,

$$\operatorname{Res}_k F \;=\; \frac{f(k) \cdot \pi \cos k\pi}{\pi \cos k\pi} \;=\; f(k) \quad \text{für alle } \; k \in \mathbb{Z}\,.$$

Setzt man dies in die Beziehung (5.21) ein und vergleicht das Ergebnis mit der Aussage des Satzes, so erkennt man, dass nur noch das Verschwinden des Integrals auf der linken Seite von (5.21) für $N \to \infty$ gezeigt werden muss. Um dies zu tun, verwenden wir einen Sachverhalt, dessen Begründung wir im zweiten Beweisschritt nachtragen, nämlich die Existenz einer Konstanten C mit

$$|\cot \pi z| \;\leq\; C \quad \text{für alle } \; z \in \Gamma_N, N \in \mathbb{Z}\,. \tag{5.22}$$

Zusammen mit der Voraussetzung (5.20) gilt dann die Beziehung

$$\Big| \int_{\Gamma_N} f(z) \cdot \pi \cot \pi z\,dz \Big| \;\leq\; \frac{M\pi C}{(N+\frac{1}{2})^\alpha} \cdot L(\Gamma_N) \;=\; \frac{M\pi C}{(N+\frac{1}{2})^\alpha} \cdot (8N+4)\,,$$

deren rechte Seite wegen $\alpha > 1$ für $N \to \infty$ verschwindet.

(b) Um den Beweis von (5.22) nachzutragen, betrachten wir zunächst die Punkte auf den vertikalen Seiten des Quadrats Γ_N, d.h., die Punkte der Form

$$z \;=\; \pm\big(N+\tfrac{1}{2}\big) + iy\,, \quad y \in \big[-N-\tfrac{1}{2}\,, N+\tfrac{1}{2} \big]\,.$$

Für die Punkte auf der rechten Quadratseite gilt (beachte $e^{i\pi N} = e^{-i\pi N}$)

$$\begin{aligned} |\cot \pi z| \;&=\; \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \;=\; \left| \frac{e^{i\pi N} e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-\pi y} + e^{-i\pi N} e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{\pi y}}{e^{i\pi N} e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-\pi y} - e^{-i\pi N} e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{\pi y}} \right| \\ &=\; \left| \frac{i e^{-\pi y} - i e^{\pi y}}{i e^{-\pi y} + i e^{\pi y}} \right| \;=\; \left| \frac{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}{e^{\pi y} + e^{-\pi y}} \right| \;=\; \big| \tanh \pi y \big| \;\leq\; 1\,. \end{aligned}$$

Analog erhält man die Abschätzung $|\cot \pi z| \leq 1$ für die linke Seite des Quadrats Γ_N. Für die Punkte

$$z = x \pm i\big(N + \tfrac{1}{2}\big)\,, \quad x \in \big[\,-N - \tfrac{1}{2}\,,\, N + \tfrac{1}{2}\big]$$

auf den horizontalen Seiten des Quadrats Γ_N gilt, zunächst für die obere Seite,

$$\begin{aligned}
|\cot \pi z| \;&=\; \left| \frac{e^{i\pi x}\, e^{-\pi(N+\frac{1}{2})} + e^{-i\pi x}\, e^{\pi(N+\frac{1}{2})}}{e^{i\pi x}\, e^{-\pi(N+\frac{1}{2})} - e^{-i\pi x}\, e^{\pi(N+\frac{1}{2})}} \right| \\
&\leq\; \frac{|e^{i\pi x}|\,|e^{-\pi(N+\frac{1}{2})}| + |e^{-i\pi x}|\,|e^{\pi(N+\frac{1}{2})}|}{\big|\,|e^{i\pi x}|\,|e^{\pi(N+\frac{1}{2})}| - |e^{-i\pi x}|\,|e^{-\pi(N+\frac{1}{2})}|\,\big|} \\
&=\; \frac{e^{\pi(N+\frac{1}{2})} + e^{-\pi(N+\frac{1}{2})}}{e^{\pi(N+\frac{1}{2})} - e^{-\pi(N+\frac{1}{2})}} \;=\; \coth\big(N + \tfrac{1}{2}\big)\,\pi \;\leq\; \coth \tfrac{3\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

Mit einer gleichermaßen beweisbaren Abschätzung für die untere Quadratseite können wir den Beweis des Satzes 5.4.5 als abgeschlossen betrachten. ■

5.4.6 Beispiel: Wir stellen uns die Aufgabe, den Grenzwert einer der elementarsten Reihen der reellen Analysis zu bestimmen, nämlich den der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,. \tag{5.23}$$

Schon sehr früh in der Analysis I lernt man, dass diese Reihe konvergiert, ihren Grenzwert erfährt man dort jedoch – aus gutem Grunde – nicht. Auch in der gegenwärtigen Situation ist die Berechnung dieses Grenzwerts nicht ganz einfach, denn der Satz 5.4.5 lässt sich nicht unmittelbar anwenden. Wählt man nämlich eine Funktion f so, dass sie an den ganzen Zahlen k den Wert $1/k^2$ hat, so besitzt F offensichtlich ganzzahlige Singularitäten. Um die Reihensumme dennoch zu berechnen, könnte man – wie zuvor bei den Integralen demonstriert – den Beweis des Satzes 5.4.5 geeignet modifizieren. Wir wählen jedoch einen anderen Weg; und zwar berechnen wir mit Hilfe des Satzes 5.4.5 die Grenzwerte der Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2}\,, \quad 0 < a < 1\,,$$

und lassen dann a gegen 0 streben. Hierzu betrachten wir die holomorphe Funktion

$$f(z) := \frac{1}{z^2 + a^2}\,, \quad f : \mathbb{C} \setminus \{ia, -ia\} \to \mathbb{C}\,,$$

die augenscheinlich nur die beiden einfachen Pole $\pm ia$ besitzt, und zudem alle Voraussetzungen des Satzes 5.4.5 erfüllt. Indem wir für die Funktion $F(z) :=$

$\pi \cot \pi z/(z^2 + a^2)$ die beiden Residuen

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{ia} F &= \lim_{z \to ia} \frac{\pi \cot \pi z}{z + ia} = \frac{\pi}{2ia} \cot i\pi a = -\frac{\pi}{2a} \coth \pi a \,, \\ \mathrm{Res}_{-ia} F &= \lim_{z \to -ia} \frac{\pi \cot \pi z}{z - ia} = -\frac{\pi}{2ia} \cot(-i\pi a) = -\frac{\pi}{2a} \coth \pi a \,, \end{aligned}$$

berechnen und den Satz 5.4.5 anwenden, erhalten wir für alle $a \in (0,1)$

$$\frac{\pi}{a} \coth \pi a = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} \,,$$

und damit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi a \coth \pi a - 1}{2a^2} \,.$$

Da diese Reihe gleichmäßig bezüglich $a \in [-1,1]$ konvergiert, können wir den Grenzübergang $a \to 0$ vollziehen und erhalten, wenn wir auf der rechten Seite die (reelle) Regel von de l'Hospital verwenden, das Ergebnis

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \,.$$

Es sei hier am Rande erwähnt, dass diese Beziehung die Nummer fünf ist in der im Jahre 1988 von der Zeitschrift *The Mathematical Intelligencer* weltweit durchgeführten Befragung zu den schönsten mathematischen Sätzen. $\Diamond$

Aufgaben

1. Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} \, dx \,, \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{x^6+1} \, dx \,.$$

2. Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1} \, dz$, wobei γ_R der positiv orientierte Rand des Durchschnitts von $U_R(0)$ mit der oberen Halbebene von $\mathbb{C}$ ist.

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} \, dx$ und $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} \, dx$.

3. Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph in einer offenen Umgebung der abgeschlossenen oberen Halbebene mit Ausnahme endlich vieler Singularitäten, von denen keine auf der reellen Achse liegt. Ferner existiere das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$, und es gelte $\lim_{|z| \to \infty} z f(z) = 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_\nu} f$$

gilt, wobei $z_1, \ldots, z_n$ die Singularitäten von f in der oberen Halbebene sind.

5.5 Argumentprinzip und Satz von Rouché

Wie wir schon mehrfach gesehen haben, sind holomorphe Funktionen sehr unübersichtlich, wenn sie eine *wesentliche* Singularität besitzen. Umgekehrt ist zu erwarten, dass holomorphe Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ ohne wesentliche Singularitäten ein einigermaßen überschaubares Verhalten aufweisen. Da Funktionen dieser Art eine große Rolle in der Funktionentheorie spielen, gibt man ihnen einen eigenen Namen, man nennt sie **meromorph**. Ist dabei P die Menge der Pole von f, so sagt man auch, f sei **meromorph** auf $D \cup P$, speziell dann, wenn man auch den unendlich fernen Punkt ∞ als Wert von f zulässt.

Ein für meromorphe Funktionen fundamentales Ergebnis ist der folgende Satz.

5.5.1 Satz (Argumentprinzip): *Gegeben sei eine meromorphe Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit nur endlich vielen Polen $p_1, \ldots, p_n$ mit den zugehörigen Ordnungen $o_1, \ldots, o_n$. Ferner besitze f endlich viele Nullstellen $a_1, \ldots, a_m$ mit den zugehörigen Vielfachheiten $v_1, \ldots, v_m$.*

Ist dann γ ein Weg in D, der bezüglich $D \cup \{p_1, \ldots, p_n\}$ nullhomolog ist und durch keine der Nullstellen verläuft, so gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{\mu=1}^{m} v_\mu\, w_\gamma(a_\mu) - \sum_{\nu=1}^{n} o_\nu\, w_\gamma(p_\nu)\,. \tag{5.24}$$

Bevor wir diesen Satz beweisen, geben wir zwei anschauliche Interpretationen seiner Aussage und formulieren einige einfache Folgerungen und Spezialfälle.

(1) Auf der rechten Seite von (5.24) steht die in zweierlei Hinsicht (nämlich mittels Umlaufzahlen und Vielfachheiten bzw. Ordnungen) „gewichtete“ Differenz der Anzahl von Nullstellen und Polen. Das Integral auf der linken Seite ist damit in der Lage, für Funktionen, die von Polen oder Nullstellen frei sind – oder von ihnen befreit wurden – die Anzahl der Nullstellen bzw. Pole zu zählen. In diesem Zusammenhang ist es vorteilhaft, den Weg γ als einfach geschlossen zu wählen, da dann die rechts auftretenden Umlaufzahlen nur die Werte 0 und 1 annehmen können.

(2) Die Bezeichnung „Argumentprinzip“ für den Satz 5.5.1 ist nicht unmittelbar einsichtig. Um sie plausibel zu machen, stellen wir fest, dass sich das Integral in (5.24) in der Form

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = w_{f\circ\gamma}(0)} \tag{5.25}$$

auch als Umlaufzahl interpretieren lässt, wie wir gleich zeigen werden. Die Formel (5.25) besagt dann, dass das Integral angibt, wie oft sich die Bildkurve $f \circ \gamma$ um den Punkt 0 windet, oder mit anderen Worten, welche Gesamtänderung das Argument der Funktion $f(\gamma(t))$ erfährt, wenn t das Definitionsintervall des Weges γ durchläuft.

Die einfache Begründung für die Formel (5.25) lautet, wenn man das Definitionsintervall von γ mit $[\alpha, \beta]$ bezeichnet,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{f'(\gamma(t))\,\dot\gamma(t)}{f(\gamma(t))}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{f\circ\gamma} \frac{dz}{z} = w_{f\circ\gamma}(0)\,.$$

Beweis des Satzes 5.5.1: Die zu beweisende Beziehung (5.24) ergibt sich einfach durch Anwendung des Residuensatzes 5.3.1 auf die Funktion f'/f. Da als Singularitäten für diese Funktion nur die Nullstellen und die Pole von f in Frage kommen, liefert diese Anwendung die Beziehung

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{\mu=1}^{m} w_\gamma(a_\mu)\, \mathrm{Res}_{a_\mu} \frac{f'}{f} + \sum_{\nu=1}^{n} w_\gamma(p_\nu)\, \mathrm{Res}_{p_\nu} \frac{f'}{f}\,.$$

Um den Beweis zu beenden, müssen wir also nur noch

$$\mathrm{Res}_{a_\mu} \frac{f'}{f} = v_\mu \quad \text{und} \quad \mathrm{Res}_{p_\nu} \frac{f'}{f} = -\,o_\nu \tag{5.26}$$

für die betrachteten μ und ν zeigen. Da v_μ die Vielfachheit der Nullstelle a_μ ist, gibt es eine in einer Umgebung $U_{r_\mu}(a_\mu)$ nullstellenfreie holomorphe Funktion $g(z)$ mit $f(z) = (z - a_\mu)^{v_\mu} g(z)$ auf $U_{r_\mu}(a_\mu)$. Dies impliziert für alle $z \in \dot U_{r_\mu}(a_\mu)$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{v_\mu (z-a_\mu)^{v_\mu - 1} g(z) + (z-a_\mu)^{v_\mu} g'(z)}{(z-a_\mu)^{v_\mu} g(z)} = \frac{v_\mu}{z - a_\mu} + \frac{g'(z)}{g(z)}\,.$$

Daraus folgt die linke Beziehung in (5.26). Zum Nachweis der rechten schließen wir analog, dass es in der Nähe eines Pols p_ν der Ordnung o_ν eine nullstellenfreie holomorphe Funktion $h(z)$ mit $f(z) = h(z)/(z - p_\nu)^{o_\nu}$ gibt. Aus der Identität

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z-p_\nu)^{o_\mu} h'(z) - o_\nu (z-p_\nu)^{o_\nu - 1} h(z)}{(z-p_\nu)^{2o_\nu}} \cdot \frac{(z-p_\nu)^{o_\nu}}{h(z)} = \frac{h'(z)}{h(z)} - \frac{o_\mu}{z - p_\nu}$$

folgt dann die rechte Beziehung in (5.26). Damit ist der Beweis erbracht. ∎

Aus dem Argumentprinzip folgern wir als Nächstes einen Satz, mit dem man in vielen praktischen Fällen die Nullstellen holomorpher Funktionen finden kann, und zwar sowohl ihre Anzahl als auch ihre ungefähre Lage. Als Integrationswege betrachten wir dabei einfach geschlossene Wege, also solche, bei denen im Inneren des Weges die Umlaufzahl stets 1 ist.

5.5.2 Satz (von Rouché): *Gegeben seien zwei holomorphe Funktionen $f, g : D \to \mathbb{C}$ und ein bezüglich D nullhomologer Weg $\gamma : [a, b] \to D$. Gilt dann*

$$\big|f(z) - g(z)\big| \;<\; \big|f(z)\big| + \big|g(z)\big| \quad \text{für alle } z \in \gamma([a, b])\,, \tag{5.27}$$

so haben f und g gleich viele Nullstellen im Inneren von γ, wobei mehrfache Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit mehrfach gezählt werden.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die Ungleichung (5.27) eine sehr schwache Bedingung für die bemerkenswerte Aussage des Satzes darstellt, denn mit $\leq$ anstelle von $<$ ist sie stets erfüllt und daher ohne Aussagekraft. In der Literatur findet man meist die – offensichtlich einschneidendere – Voraussetzung, bei der auf der rechten Seite nur einer der beiden Summanden steht.

Beweis des Satzes 5.5.2: Der Beweis erfolgt durch Anwendung des Argumentprinzips 5.5.1 auf die Funktion $h(z) := f(z)/g(z)$. Um diese Funktion auf einer offenen Umgebung U der Menge $\gamma([a, b])$ definieren zu können, beachten wir, dass die Funktion $g(z)$ wegen (5.27) auf der Kurve γ nicht verschwindet (denn $g(z) = 0$ hätte $|f(z)| < |f(z)|$ zur Folge), und es daher eine solches U gibt. Da die Funktion $h(z)$ wegen (5.27) der Ungleichung

$$\big|h(z) - 1\big| \;<\; \big|h(z)\big| + 1 \quad \text{für alle } z \in \gamma([a, b]) \tag{5.28}$$

genügt, liegt das h-Bild des Weges γ in der geschlitzten Zahlenebene $\mathbb{C}^-$, denn andernfalls gäbe es ein $\zeta \in \gamma([a, b])$ mit $h(\zeta) \leq 0$, und das hieße $|h(\zeta) - 1| = |h(\zeta)| + 1$ im Widerspruch zu (5.28).

Wählt man nun die obige Umgebung U von $\gamma([a, b])$ so klein, dass $h(z)$ auf U keine Nullstelle besitzt, und dass $h(U) \subset \mathbb{C}^-$ gilt, so besitzt die Funktion $h'(z)/h(z)$ auf U eine Stammfunktion, nämlich $\ln h(z)$ (vgl. Satz 2.2.3 und Beispiele 2.3.2). Damit verschwindet das Integral von $h'(z)/h(z)$ längs γ, und wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; \int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz \;=\; \int_\gamma \frac{g(z)f'(z) - g'(z)f(z)}{g(z)^2} \cdot \frac{g(z)}{f(z)}\, dz \\ &=\; \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz - \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz\,. \end{aligned}$$

Mit der im Satz 5.5.1 beschriebenen Bedeutung dieser Integrale für die Nullstellen von f und g ergibt sich die zu beweisende Aussage. ■

5.5.3 Beispiel: Um die Lage der Nullstellen des Polynoms

$$f(z) \;:=\; z^4 + 7z + 1$$

zu bestimmen, setzen wir zunächst $g(z) := 7z$. Für alle $z \in S_1(0)$, d.h. $|z| = 1$, gilt dann

$$|f(z) - g(z)| \;=\; |z^4 + 1| \;\leq\; |z|^4 + 1 \;=\; 2 \quad \text{und} \quad |g(z)| \;=\; |7z| \;=\; 7\,.$$

Nach Satz 5.5.2 hat dann $f(z)$ in $U_1(0)$ genau so viele Nullstellen wir $g(z)$, also eine. Betrachten wir als Nächstes die Punkte $z \in S_2(0)$, also $|z| = 2$, und setzen $h(z) := z^4$, so gilt

$$|f(z) - h(z)| \;=\; |7z + 1| \;\leq\; 15 \quad \text{und} \quad |h(z)| \;=\; |z|^4 \;=\; 16\,.$$

Folglich hat $f(z)$ wie das Monom z^4 genau vier Nullstellen in $U_2(0)$. Wie zuvor gesehen, liegt genau eine davon in $U_1(0)$. ◊

Aus dem Satz von Rouché ergibt sich leicht die folgende Fixpunktaussage:

5.5.4 Folgerung: *Gegeben sei eine in einer Umgebung von $\overline{U_1(0)}$ holomorphe Funktion f. Gilt dann $f(\overline{U_1(0)}) \subseteq U_1(0)$, so besitzt f genau einen Fixpunkt in $U_1(0)$.*

Begründung: Da die Fixpunkte von $f(z)$ gerade die Nullstellen von $f(z) - z$ sind, versuchen wir die Funktion $h(z) := f(z) - z$ mit der Funktion $g(z) := z$, die offensichtlich genau eine Nullstelle in $U_1(0)$ besitzt, in Beziehung zu setzen. Für alle $z \in S_1(0)$ gilt

$$|h(z) - g(z)| \;=\; |f(z)| \;<\; 1 \;=\; |g(z)|\,.$$

Die Behauptung folgt damit sofort aus dem Satz von Rouché. ■

Aufgaben

1. Zeigen Sie:
   (a) Alle Lösungen der Gleichung $z^5 + z + 1 = 0$ liegen in $U_{5/4}(0)$.
   (b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt die Gleichung $e^z = 3z^n$ genau n Lösungen in $U_1(0)$.
   (c) Die Funktion $2 + z^2 - e^{iz}$ hat genau eine Nullstelle in der oberen Halbebene, und diese liegt in $\overline{U_{\sqrt{3}}(0)}$.
2. Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra mit Hilfe des Satzes von Rouché, indem Sie ein gegebenes Polynom n-ten Grades mit dem Monom z^n in Beziehung setzen.