Prof. Dr. B. Aulbach
Dipl.-Math. S. Krömer
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

11. Februar 2004

Funktionentheorie

13. Übungsblatt

Aufgabe 49
Berechnen Sie

$$\int_{S_{1/2}(1)} \frac{e^z}{(1-z)^3}\,dz \ , \quad \int_{S_{1/2}(0)} \frac{dz}{z(1-z)^3} \ , \quad \int_{S_{1/2}(0)} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz \ .$$

Aufgabe 50
Imitieren Sie den Beweis des Residuensatzes zum Nachweis von

$$\int_{S_2(0)} \frac{dz}{z^2(z^2+2z+2)} \ = \ 0\,.$$

Aufgabe 51
Zeigen Sie für die nachfolgend definierte Funktion $f(z) = h(z)\frac{g'(z)}{g(z)-b}$:

(a) Sind $g, h : D \to \mathbb{C}$ holomorph, und ist $z_0 \in D$ eine b-Stelle der Vielfachheit n von g, so gilt

$$\mathrm{Res_{z_0} f} \ = \ \mathrm{n \cdot h(z_0)}\,.$$

(b) Ist $h : D \to \mathbb{C}$ holomorph, und hat die holomorphe Funktion $g : D \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ einen Pol der Ordnung m in z_0, so gilt

$$\mathrm{Res_{z_0} f} \ = \ \mathrm{m \cdot h(z_0)}\,.$$

Aufgabe 52
Berechnen Sie die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx\ ,\quad \int_0^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx\ .$$

Aufgabe 53
Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz$, wobei γ_R der positiv orientierte Rand des Durchschnitts von $U_R(0)$ mit der oberen Halbebene von $\mathbb{C}$ ist.

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$ und $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$.

Aufgabe 54
Es sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph in einer offenen Umgebung der abgeschlossenen oberen Halbebene mit Ausnahme endlich vieler Singularitäten, von denen keine auf der reellen Achse liegt. Ferner existiere das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, und es gelte $\lim_{|z|\to\infty} zf(z) = 0$. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;=\; 2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_\nu} f$$

gilt, wobei $z_1, \ldots, z_n$ die Singularitäten von f in der oberen Halbebene sind.

Aufgabe 55
Zeigen Sie:

(a) Alle Lösungen der Gleichung $z^5 + z + 1 = 0$ liegen in $U_{5/4}(0)$.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt die Gleichung $e^z = 3z^n$ genau n Lösungen in $U_1(0)$.

(c) Die Funktion $2 + z^2 - e^{iz}$ hat genau eine Nullstelle in der oberen Halbebene, und diese liegt in $\overline{U_{\sqrt{3}}(0)}$.

Aufgabe 56
Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra mit Hilfe des Satzes von Rouché, indem Sie ein gegebenes Polynom n-ten Grades mit dem Monom z^n in Beziehung setzen.