Anhang A
Fixpunktsätze

In diesem Anhang stellen wir einige Ergebnisse über Fixpunkte bereit, die im Verlauf dieser Vorlesung benötigt werden.

A.1 Satz (Fixpunktsatz vom Brouwer-Typ): Gegeben sei eine auf einem kompakten Intervall I stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$. Gilt dann

$$f(I) \subseteq I \quad \text{oder} \quad I \subseteq f(I) ,$$

so besitzt f einen Fixpunkt, d.h., es gibt ein $x^* \in I$ mit $f(x^*) = x^*$.

Beweis: Wir setzen $[a,b] := I$ und zeigen, dass die auf diesem Intervall definierte Hilfsfunktion $g(x) := f(x) - x$ in jedem der beiden betrachteten Fälle eine Nullstelle besitzt.

(i) Es sei $f(I) \subseteq I$ (siehe Abbildung A.1 links). Dann gilt $f(a)\,, f(b) \in [a\,,b]$, also insbesondere $f(a) \geq a$ und $f(b) \leq b$. Hieraus folgt zunächst $g(a) \geq 0 \geq g(b)$. Nach dem Zwischenwertsatz besitzt dann g eine Nullstelle.

(ii) Es sei jetzt $I \subseteq f(I)$ (siehe Abbildung A.1 rechts). Wegen $a\,,b \in f(I)$ gibt es dann nach dem Zwischenwertsatz zwei Punkte $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $f(x_1) = a$ und $f(x_2) = b$. Daraus folgt schließlich $g(x_1) = f(x_1) - x_1 = a - x_1 \leq 0 \leq b - x_2 = f(x_2) - x_2 = g(x_2)$, so dass wieder der Zwischenwertsatz eine Nullstelle von g liefert. ■

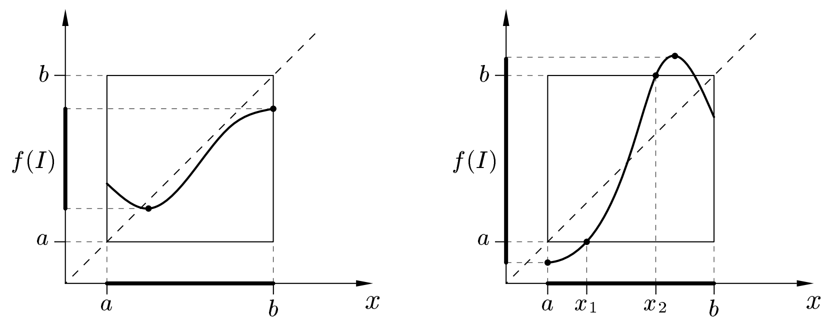

Abb. A.1 Die beiden im Satz A.1 beschriebenen Fälle mit $[a\,,b] = I$

Der nun folgende Fixpunktsatz, der von kontraktiven Abbildungen handelt, beschreibt ein in verschiedenen Zweigen der Mathematik einsetzbares Hilfsmittel, das so genannte **Kontraktionsprinzip**.

A.2 Satz (Banach'scher Fixpunktsatz): Gegeben sei ein vollständiger metrischer Raum (X, d) und eine Kontraktion auf X, das ist eine Abbildung $f : X \to X$, die mit einer reellen Konstanten $s \in [0, 1)$ einer Abschätzung der Form

$$d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X$$

genügt. Dann besitzt die Abbildung f genau einen Fixpunkt x^* in X, d.h., es gibt genau ein $x^* \in X$ mit

$$f(x^*) = x^*.$$

Dieser Fixpunkt ist zudem Grenzwert jeder Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X, die mit beliebigem Startwert $x_1 \in X$ wie folgt definiert ist:

$$x_{n+1} := f(x_n) \quad \text{für alle } n \geq 1 .$$

Beweis: Siehe Analysis I. ∎

Inwieweit man den Abstand eines Punktes x vom Fixpunkt x^* einer Kontraktion f schon mittels des Abstands von x zu $f(x)$ nach oben abschätzen kann, beschreibt der folgende Zusatz zum Kontraktionsprinzip.

A.3 Korollar (zum Banach'schen Fixpunktsatz): Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $f : X \to X$ eine Kontraktion mit Kontraktionskonstante s, so gilt für den Fixpunkt x^* von f die Beziehung

$$d(x, x^*) \leq \frac{1}{1-s}\, d(x, f(x)) \quad \text{für alle } x \in X .$$

Beweis: Für jedes $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$d(x, f^n(x)) \leq \sum_{\nu=0}^{n-1} d(f^\nu(x), f^{(\nu+1)}(x)) \leq \sum_{\nu=0}^{n-1} s^\nu\, d(x, f(x))$$

$$\leq \ d(x, f(x)) \sum_{\nu=0}^{\infty} s^{\nu} \ = \ d(x, f(x)) \, \frac{1}{1-s} \, . \tag{A.1}$$

Wegen der Stetigkeit der Funktion $d(x, \cdot) : X \to \mathbb{R}_0^+$ gilt dann für jedes $x \in X$

$$d(x, x^*) \ = \ d(x, \lim_{n\to\infty} f^n(x)) \ = \ \lim_{n\to\infty} d(x, f^n(x)) \overset{(A.1)}{\leq} \frac{1}{1-s} \, d(x, f(x)) \, . \qquad \blacksquare$$

Hängt eine Kontraktion von einem Parameter ab, so stellt sich die Frage, inwieweit auch der Fixpunkt dieser Kontraktion von diesem Parameter abhängt. Hinsichtlich *stetiger* Abhängigkeit äußert sich der folgende Satz.

A.4 Satz (gleichmäßiges Kontraktionsprinzip): Gegeben seien ein vollständiger metrischer Raum (X, d), ein metrischer Raum (P, d_P) und eine Abbildung

$$w : P \times X \to X$$

mit folgenden Eigenschaften:

(a) Es gibt ein $s \in [0, 1)$, so dass

$$d(w(p, x), w(p, y)) \ \leq \ s \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$ und $p \in P$ gilt.

(b) Für jedes $x \in X$ ist die Abbildung $w(\cdot\,, x) : P \to X$ stetig.

Dann besitzt die Abbildung $w(p, \cdot) \ : \ X \ \to \ X$ für jedes $p \in P$ einen eindeutig bestimmten Fixpunkt $x^*(p)$, und dieser hängt stetig von p ab, d.h., die Abbildung $x^* : P \to X$ ist stetig.

Beweis: Da wegen der Voraussetzung (a) für jedes $p \in P$ der Banach'sche Fixpunktsatz A.2 anwendbar ist, ist nur noch die Stetigkeit der Funktion $x^* : P \to X$ zu zeigen. Zum Zwecke dieses Nachweises seien beliebige $p\,, p_0 \in P$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(x^*(p)\,, x^*(p_0)) \ &= \ d(w(p, x^*(p))\,, w(p_0, x^*(p_0))) \ \leq \\ &\leq \ d(w(p, x^*(p))\,, w(p, x^*(p_0))) + d(w(p, x^*(p_0))\,, w(p_0, x^*(p_0))) \ \leq \\ &\leq \ s \cdot d(x^*(p)\,, x^*(p_0)) + d(w(p, x^*(p_0))\,, w(p_0, x^*(p_0))) \, . \end{aligned}$$

Hieraus folgt dann

$$d(x^*(p)\,, x^*(p_0)) \ \leq \ \frac{1}{1-s} \, d(w(p, x^*(p_0))\,, w(p_0, x^*(p_0))) \, .$$

Wegen der Voraussetzung (b) strebt die rechte und damit auch die linke Seite dieser Ungleichung für $p \to p_0$ gegen 0. $\blacksquare$

Anhang B
Metrische Räume

Wir stellen in diesem Anhang einige Ergebnisse über metrische Räume zusammen, die im Verlauf der Vorlesung benötigt werden, aber nicht zu den vorausgesetzten Grundkenntnissen (Analysis I und II, 2001/02) gehören.

B.1 Satz: Ein Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) ist genau dann kompakt (im Sinne von Heine-Borel), wenn sie **folgenkompakt** ist, d.h., wenn jede Folge in A einen Häufungswert in A besitzt.

Beweis: später in diesem Anhang ■

Korollar zu Satz B.1: Jeder kompakte metrische Raum ist vollständig.

Beweis: Nach Satz B.1 besitzt jede Cauchy-Folge im betrachteten metrischen Raum einen Häufungswert in diesem Raum. Nach Analysis I, Satz 2.4.5, ist dieser Häufungswert der Grenzwert der Cauchy-Folge. ■

Bevor wir uns dem Beweis des Satzes B.1 zuwenden, klären wir noch einige grundlegende Sachverhalte zum Abstand zwischen Punkten und Mengen in metrischen Räumen. Hierzu sei (X, d) ein metrischer Raum und M eine Teilmenge von X. Dann definieren wir den **Abstand** zwischen einem Punkt $a \in X$ und der Menge M vermittels der Beziehung

$$\operatorname{dist}(a, M) := \inf\{d(a, c) : c \in M\}\,. \tag{B.1}$$

Dass die hiermit zu einer gegebenen Menge M eingeführte **Abstands-** oder **dist-Funktion**

$$\operatorname{dist}(\,\cdot\,, M) : X \to \mathbb{R}_0^+ \tag{B.2}$$

stetig ist, mehr noch, dass sie die globale Lipschitz-Konstante 1 besitzt (und somit gleichmäßig stetig ist), besagt der nun folgende Satz.

B.2 Satz: Ist M eine beliebige Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d), so gilt für die in (B.1) und (B.2) definierte dist-Funktion die Abschätzung

$$|\operatorname{dist}(a, M) - \operatorname{dist}(b, M)| \;\le\; d(a, b) \quad \text{für alle } a, b \in X \,. \tag{B.3}$$

Beweis: Ausgangspunkt dieses Beweises ist die für alle $a, b \in X$ und $c \in M$ gültige Ungleichung

$$\operatorname{dist}(a, M) \overset{(B.1)}{\le} d(a, c) \;\le\; d(a, b) + d(b, c) \,.$$

Bringt man diese Ungleichung in die Form

$$\operatorname{dist}(a, M) - d(a, b) \;\le\; d(b, c) \,,$$

so erkennt man, dass (bei festem a und b) die linke Seite eine untere Schranke für die Menge $\{d(b, c) : c \in M\}$ ist. Daraus folgt dann

$$\operatorname{dist}(a, M) - d(a, b) \;\le\; \inf\{d(b, c) : c \in M\} \overset{(B.1)}{=} \operatorname{dist}(b, M) \,,$$

und weiter erhält man

$$\operatorname{dist}(a, M) - \operatorname{dist}(b, M) \;\le\; d(a, b) \,.$$

Da man bei der bislang durchgeführten Überlegung die beliebig aus X gewählten Punkte a und b vertauschen kann, gilt die letzte Ungleichung auch dann, wenn man auf der linken Seite das Vorzeichen ändert. Damit ist schließlich die Ungleichung (B.3) bewiesen. ■

Dass im Fall der Kompaktheit einer Menge M der Abstand $\operatorname{dist}(a, M)$ von (mindestens) einem Punkt aus M realisiert wird, ist anschaulich klar. Der folgende Satz besagt, dass dies tatsächlich so ist.

B.3 Satz: Ist M eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes X, so gibt es zu jedem $a \in X$ ein $b = b(a) \in M$ mit

$$\operatorname{dist}(a, M) \;=\; d(a, b) \,.$$

Beweis: Für jedes feste $a \in X$ besitzt die nach Satz B.2 stetige Funktion $\operatorname{dist}(\cdot\,, \{a\}) : X \to \mathbb{R}_0^+$ auf der kompakten Menge M ein Minimum, d.h. es gibt ein $b \in M$ mit

$$\operatorname{dist}(b, \{a\}) \;=\; \min\{\operatorname{dist}(x, \{a\}) : x \in M\} \,. \tag{B.4}$$

Da aber für jedes $x \in X$ die Beziehung $\operatorname{dist}(x, \{a\}) \overset{(B.1)}{=} d(x, a) = d(a, x)$ gilt, lässt sich die Identität (B.4) in der Form

$$d(a, b) = \min\{d(a, x) : x \in M\}$$

schreiben, deren rechte Seite gemäß (B.1) gerade $\operatorname{dist}(a, M)$ ist. ■

Um tiefere Einsichten in die topologische Struktur metrischer Räume zu gewinnen, führen wir nun eine Verschärfung des Beschränktheitsbegriffs ein.

B.4 Definition : Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) heißt **total beschränkt**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_m$ in X gibt, so dass $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_\varepsilon(x_i)$ gilt.

Eine einfache Beziehung zwischen totaler Beschränktheit und Folgenkompaktheit beschreibt der folgende Hilfssatz.

B.5 Hilfssatz : Jede folgenkompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist total beschränkt.

Beweis: Ein Teilmenge A eines metrischen Raums (X, d) sei folgenkompakt, aber nicht total beschränkt. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass kein endliches System von ε-Umgebungen die ganze Menge A überdeckt. Ausgehend von einem beliebigen Punkt $x_1 \in A$ können wir dann einen Punkt $x_2 \in A \setminus U_\varepsilon(x_1)$ wählen, dann einen Punkt $x_3 \in A \setminus (U_\varepsilon(x_1) \cup U_\varepsilon(x_2))$ usw. Insgesamt gewinnt man auf diese Weise eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten von A mit der Eigenschaft $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ für $i \neq j$. Diese Folge enthält offensichtlich keinen Häufungswert und liefert somit einen Widerspruch zur vorausgesetzten Folgenkompaktheit von A. ■

Der Hilfssatz B.5 erlaubt uns, den Beweis des Satzes B.1 nachzutragen.

Beweis von Satz B.1: (a) A sei als kompakt vorausgesetzt und als nicht folgenkompakt angenommen. Dann gibt es eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A ohne Häufungswert in A, d.h., zu jedem Punkt $y \in A$ gibt es eine offene Umgebung $U(y)$, in der nur endlich viele Glieder der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ liegen. Nach Voraussetzung besitzt die offene Überdeckung $\{U(y) \in \mathcal{P}(X) : y \in A\}$ von A eine endliche Teilüberdeckung. Folglich enthält A nur endlich viele Glieder der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Dies steht im Widerspruch zur Wahl von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ als Folge in A.

(b) A sei als folgenkompakt vorausgesetzt und als nicht kompakt angenommen. Dann gibt es eine offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von A, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Da A nach Hilfssatz B.5 total beschränkt ist, gibt es zu jedem

$k \in \mathbb{N}$ endlich viele $1/k$-Umgebungen von Punkten aus A, deren Vereinigung A überdeckt. Folglich gibt es (da $\mathcal{U}$ keine endliche Teilüberdeckung von A besitzt) zu jedem $k \in \mathbb{N}$ einen Punkt $x_k \in A$, so dass $A \cap U_{1/k}(x_k)$ nicht von endlich vielen Mengen aus $\mathcal{U}$ überdeckt wird.

Die so konstruierte Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt nach Voraussetzung einen Häufungswert $x^* \in A$, und dieser liegt in einer Menge U der Überdeckung $\mathcal{U}$. Da U offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x^*) \subseteq U$. Andererseits gibt es (da x^* ein Häufungswert von $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist) ein $m > 2/\varepsilon$ mit $d(x_m, x^*) < \varepsilon/2$. Daher gilt für jedes $x \in U_{1/m}(x_m)$

$$d(x, x^*) \le d(x, x_m) + d(x_m, x^*) < \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Dies impliziert die Inklusionskette $U_{1/m}(x_m) \subseteq U_\varepsilon(x^*) \subseteq U$, die der Tatsache widerspricht, dass $A \cap U_{1/m}(x_m)$ nicht von endlich vielen Mengen des Systems $\mathcal{U}$ überdeckt wird. ∎

Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ oder $\mathbb{C}$ ist bekanntlich genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. In allgemeinen metrischen Räumen gilt diese Äquivalenz nicht mehr. Ersetzt man jedoch die Beschränktheit durch die totale Beschränktheit, so erhält man folgendes Resultat.

B.6 Satz (Kompaktheit in vollständigen metrischen Räumen): Eine Teilmenge A eines vollständigen metrischen Raumes (X, d) ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und total beschränkt ist.

Beweis: (a) Ist die Menge A kompakt, so ist sie bekanntlich abgeschlossen und beschränkt. Dass sie sogar total beschränkt ist, folgt aus der Tatsache, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die offene Überdeckung $\{U_\varepsilon(x) \in \mathcal{P}(X) : x \in A\}$ von A eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

(b) A sei abgeschlossen und total beschränkt. Dann gibt es endlich viele 1-Umgebungen von Punkten in A, deren Vereinigung A überdeckt. Ist nun $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in A, so liegen in mindestens einer dieser 1-Umgebungen, wir bezeichnen sie mit U_1, unendlich viele Folgenglieder. Wir wählen nun ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_1} \in U_1 \cap A$. Da A total beschränkt ist, ist auch $U_1 \cap A$ total beschränkt. Von den endlich vielen $\frac{1}{2}$-Umgebungen, die $U_1 \cap A$ überdecken, enthält dann mindestens eine, wir bezeichnen sie mit U_2, unendlich viele Folgenglieder. Wir wählen nun ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_2 > n_1$ und $x_{n_2} \in U_2 \cap U_1 \cap A$. So fortfahrend konstruieren wir eine Folge von $\frac{1}{2^k}$-Umgebungen U_k und eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_{n_k} \in V_k := \bigcap_{i=1}^{k} U_i \cap A \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}\,.$$

Wegen der für alle $k \in \mathbb{N}$ gültigen Beziehung $V_{k+1} \subset V_k \subseteq U_k$ gilt die Abschätzung $d(x_{n_k}, n_{n_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wie im Beweis von Satz 2.1.6 gezeigt, impliziert dies, dass die Folge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Wegen der Vollständigkeit von X besitzt diese Folge dann einen Grenzwert in X, der wegen der Abgeschlossenheit von A sogar in A liegt. Damit enthält die beliebig vorgegebene Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge mit Grenzwert in A. Dies beweist die Folgenkompaktheit von A. ■