

6.9 Die L^p -Räume

Wir wenden uns nun einem Aspekt der Lebesgue-integrierbaren Funktionen zu, der weniger mit konkreter Integration zu tun hat, als vielmehr mit den Auswirkungen der im Abschnitt 6.6 beschriebenen Konvergenzsätze auf strukturelle Fragestellungen der modernen ANALYSIS. Es geht dabei darum, meßbare Funktionen mit bestimmten Integrationseigenschaften zu Räumen zusammenzufassen, die für die ANALYSIS in Funktionenräumen, die sogenannte FUNKTIONAL-ANALYSIS, von fundamentaler Bedeutung sind.

Wir legen diesem Abschnitt eine meßbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}^N$ zugrunde und definieren zunächst für jede reelle Zahl $p \geq 1$ die Funktionenmenge

$$L^p(A) := \{f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ meßbar und } |f|^p \text{ integrierbar}\}. \quad (6.72)$$

Die Integrierbarkeit von $|f|^p$ impliziert dann gemäß Satz 6.5.12, daß die Funktion $|f|^p$ und damit auch $|f|$ den Wert ∞ höchstens auf einer Menge vom Maß 0 annehmen kann. Wir können (und werden) daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit stets annehmen, daß die Funktionen aus $L^p(A)$ nur endliche Werte annehmen.

Unser vorrangiges Ziel ist es nun, jede der Mengen $L^p(A)$, $p \geq 1$, durch Einführung einer algebraischen und einer topologischen Struktur zu einem Banachraum zu machen. Wir beginnen mit einem einfachen Resultat bezüglich der algebraischen Operationen in $L^p(A)$.

6.9.1 Satz ($L^p(A)$ als Vektorraum): *Bezüglich der Addition von Funktionen und der Multiplikation von Funktionen mit reellen Zahlen ist $L^p(A)$ ein reeller unendlichdimensionaler Vektorraum.*

Beweis: Mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f \in L^p(A)$ gehört auch die Funktion αf zu $L^p(A)$, denn αf ist offensichtlich meßbar, und $|\alpha f|^p$ ist (wegen $|\alpha f|^p = |\alpha|^p |f|^p$) integrierbar. Seien jetzt $f, g \in L^p(A)$. Dann ist $f + g$ und auch $|f + g|^p$ nach den Sätzen 6.5.8 und 6.5.9 meßbar, und es gilt

$$\begin{aligned} \int_A |f + g|^p d\lambda_N &\leq \int_A (|f| + |g|)^p d\lambda_N = \int_A (|f(x)| + |g(x)|)^p dx = \\ &= \int_A (2 \max\{|f(x)|, |g(x)|\})^p dx = 2^p \int_A \max\{|f(x)|^p, |g(x)|^p\} dx \leq \\ &\leq 2^p \int_A (|f(x)|^p + |g(x)|^p) dx = 2^p \left[\int_A |f|^p d\lambda_N + \int_A |g|^p d\lambda_N \right] < \infty. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $|f + g|^p$ integrierbar und folglich $f + g$ ein Element von $L^p(A)$ ist. ■

Der im Satz 6.9.1 beschriebenen algebraischen Struktur von $L^p(A)$ wollen wir als nächstes durch Einführung einer Norm eine topologische Struktur hinzufügen. Zu diesem Zwecke betrachten wir zunächst die Abbildung

$$f \mapsto \left(\int_A |f|^p d\lambda_N \right)^{1/p}, \quad L^p(A) \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad (6.73)$$

müssen aber sogleich feststellen, daß diese Zuordnung noch keine Norm definiert. Sie ist nämlich nicht positiv definit, da das Integral bekanntlich auch für Funktionen verschwinden kann, die nicht die Nullfunktion sind. Auf der anderen Seite läßt sich die Funktion (6.73), wie wir gleich sehen werden, durch geeignete Modifikation zu einer Norm machen. Zu diesem Zwecke erachtet man zwei Funktionen aus $L^p(A)$ als gleichwertig, wenn sie fast überall in A übereinstimmen. Hinsichtlich Meßbarkeit, Integrierbarkeit und Integralwert sind solche Funktionen nämlich ohnehin nicht zu unterscheiden. Genau genommen betrachtet man auf dem Raum $L^p(A)$ die Relation

$$f \sim g \quad :\Leftrightarrow \quad f(x) = g(x) \quad \text{für fast alle } x \in A,$$

die offensichtlich eine Äquivalenzrelation ist, und identifiziert dann jede Funktion $f \in L^p(A)$ mit der von f erzeugten Äquivalenzklasse. Mit anderen Worten, statt des Vektorraums $L^p(A)$ betrachtet man die Faktorisierung $L^p(A)/N$ von $L^p(A)$ nach dem Unterraum $N := \{f \in L^p(A) : \int_A |f|^p d\lambda_N = 0\}$. Wir schreiben hierfür zur Unterscheidung

$$\mathcal{L}^p(A) := L^p(A)/N.$$

Daß diese Konstruktion in der Tat das Gewünschte leistet, besagt der nun folgende Satz.

6.9.2 Satz (Einführung der \mathcal{L}^p -Norm): *Ist $A \subseteq \mathbb{R}^N$ meßbar, so ist die für alle $f \in \mathcal{L}^p(A)$, $p \geq 1$, definierte Funktion*

$$\|f\|_p := \left(\int_A |f|^p d\lambda_N \right)^{1/p}, \quad \|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(A) \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad (6.74)$$

eine Norm auf $\mathcal{L}^p(A)$, die sogenannte \mathcal{L}^p -Norm.

Der Beweis dieses Satzes erfordert einige Vorbereitungen, insbesondere die Herleitung zweier Ungleichungen, die auch anderweitig von Bedeutung sind. Wir beginnen mit einem rein technischen Hilfssatz über reelle Zahlen.

6.9.3 Hilfssatz: *Für $\sigma, \tau \geq 0$ und $r \in (0, 1)$ gilt $\sigma^r \tau^{1-r} \leq r\sigma + (1-r)\tau$.*

Beweis: Die Aussage des Hilfssatzes ist trivial, falls $\sigma = 0$ oder $\tau = 0$ oder $\sigma = \tau$ ist. Von den dann noch verbleibenden Fällen $0 < \sigma < \tau$ und $0 < \sigma < \tau$ genügt es o. B. d. A. den ersten zu behandeln. In diesem Fall liegt dann die reelle Zahl $\xi := r\sigma + (1-r)\tau$ wegen $0 < r < 1$ im Intervall (σ, τ) , und nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung, angewandt auf den natürlichen Logarithmus, gibt es ein $\alpha \in [\sigma, \xi]$ und ein $\beta \in [\xi, \tau]$ mit

$$\frac{1}{\alpha} = \ln' \alpha = \frac{\ln \xi - \ln \sigma}{\xi - \sigma} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\beta} = \ln' \beta = \frac{\ln \tau - \ln \xi}{\tau - \xi}.$$

Wegen $\alpha \leq \beta$ folgt hieraus zunächst die Beziehung

$$\frac{\ln \tau - \ln \xi}{\tau - \xi} \leq \frac{\ln \xi - \ln \sigma}{\xi - \sigma},$$

die wir in drei Schritten weiter umformen:

$$\begin{aligned} (\ln \tau - \ln \xi)(\xi - \sigma) &\leq (\ln \xi - \ln \sigma)(\tau - \xi), \\ (\xi - \sigma) \ln \tau + (\tau - \xi) \ln \sigma &\leq (\tau - \sigma) \ln \xi, \\ \frac{\xi - \sigma}{\tau - \sigma} \ln \tau + \frac{\tau - \xi}{\tau - \sigma} \ln \sigma &\leq \ln \xi. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von $\xi = r\sigma + (1-r)\tau$ folgt hieraus die Beziehung

$$(1-r) \ln \tau + r \ln \sigma \leq \ln(r\sigma + (1-r)\tau),$$

die nach Anwendung der e -Funktion die zu beweisende Ungleichung liefert. ■

Während die positive Definitheit und die Homogenität der in (6.74) eingeführten Funktion offensichtlich sind, ist der Nachweis der Dreiecksungleichung nichttrivial. Er beruht auf folgendem Satz.

6.9.4 Satz (Höldersche Ungleichung): Gegeben sei eine meßbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}^N$, ein $p \in (1, \infty)$ und dasjenige $q \in (1, \infty)$, für das $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt, nämlich $q := \frac{p}{p-1}$. Für je zwei Funktionen $f \in \mathcal{L}^p(A)$ und $g \in \mathcal{L}^q(A)$ gilt dann $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(A)$ und

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q. \quad (6.75)$$

Diese Ungleichung heißt **Höldersche Ungleichung**.

Beweis: Wir setzen $F := (\|f\|_p)^p$ und $G := (\|g\|_q)^q$. Ist $F = 0$ oder $G = 0$, so gilt $f(x) \cdot g(x) = 0$ für fast alle $x \in A$, denn nach Satz 6.6.13 verschwindet wenigstens einer der beiden Faktoren fast überall in A . Damit gilt $\|f \cdot g\|_1 = 0$, und die Ungleichung (6.75) ist trivialerweise erfüllt.

Jetzt seien also $F > 0$ und $G > 0$. Der Hilfssatz 6.9.3, angewandt mit $r = \frac{1}{p}$, liefert dann für jedes $x \in A$ die Ungleichung

$$\left(\frac{|f(x)|^p}{F}\right)^{1/p} \left(\frac{|g(x)|^q}{G}\right)^{1/q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{F} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{G}.$$

Mittels Integration erhalten wir hieraus

$$\frac{1}{F^{1/p} G^{1/q}} \int_A |f(x)| |g(x)| dx \leq \frac{1}{pF} \int_A |f(x)|^p dx + \frac{1}{qG} \int_A |g(x)|^q dx.$$

Daraus folgt zunächst

$$\frac{\|f \cdot g\|_1}{F^{1/p} G^{1/q}} \leq \frac{1}{pF} (\|f\|_p)^p + \frac{1}{qG} (\|g\|_q)^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

und dies impliziert $\|f \cdot g\|_1 \leq F^{1/p} G^{1/q} = \|f\|_p \cdot \|g\|_q$. ■

6.9.5 Satz (Minkowskische Ungleichung): Gegeben sei eine meßbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}^N$ und ein $p \in [1, \infty)$. Für beliebige Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^p(A)$ gilt dann die sogenannte **Minkowskische Ungleichung**

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad (6.76)$$

Beweis: Der Fall $p = 1$ ergibt sich sofort aus der Beziehung

$$\|f + g\|_1 = \int_A |f + g| d\lambda_N \leq \int_A (|f| + |g|) d\lambda_N = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

Sei jetzt also $p > 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\|f + g\|_p)^p &= \int_A |f(x) + g(x)|^p dx = \\ &= \int_A |f(x) + g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx \leq \\ &\leq \int_A |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx + \int_A |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} dx = \\ &= \| |f| |f + g|^{p-1} \|_1 + \| |g| |f + g|^{p-1} \|_1. \end{aligned} \quad (6.77)$$

Für die reelle Zahl $q := \frac{p}{p-1} > 1$ gilt dann $(|f + g|^{p-1})^q = |f + g|^{(p-1)q} = |f + g|^p$, d.h., wegen $|f + g| \in \mathcal{L}^p(A)$ gilt $|f + g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(A)$. Damit läßt sich der Ausdruck (6.77) mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung (6.75) wie folgt weiter abschätzen:

$$\begin{aligned} &\| |f| |f + g|^{p-1} \|_1 + \| |g| |f + g|^{p-1} \|_1 \stackrel{(6.75)}{\leq} \\ &\leq \|f\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \| |f + g|^{p-1} \|_q = \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \| |f + g|^{p-1} \|_q. \end{aligned} \quad (6.78)$$

Weiter gilt wegen $(p-1)q = p$

$$\begin{aligned} \| |f+g|^{p-1} \|_q &= \left(\int_A (|f+g|^{p-1})^q d\lambda_N \right)^{1/q} = \left(\int_A |f+g|^p d\lambda_N \right)^{1/q} = \\ &= \left(\left(\int_A |f+g|^p d\lambda_N \right)^{1/p} \right)^{p-1} = (\|f+g\|_p)^{p-1}. \end{aligned}$$

Zusammen mit (6.77) und (6.78) folgt also

$$(\|f+g\|_p)^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) (\|f+g\|_p)^{p-1}$$

und hieraus die zu beweisende Ungleichung (6.76). ■

Nachdem nun die Minkowskische Ungleichung bewiesen ist, ist der Nachweis, daß $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(A) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine Norm ist, reine Formsache.

Beweis von Satz 6.9.2: Wie schon erwähnt sind die positive Definitheit und die Homogenität von $\|\cdot\|_p$ trivial. Und die Dreiecksungleichung liegt jetzt in Form der Minkowskischen Ungleichung (6.76) vor. ■

Wir kommen nun zum letzten Satz dieser Vorlesung, der besagt, daß jeder der normierten Räume $(\mathcal{L}^p(A), \|\cdot\|_p)$, $p \geq 1$, vollständig ist.

6.9.6 Satz ($\mathcal{L}^p(A)$ als Banachraum): Gegeben sei eine Lebesguemeßbare Menge $A \subseteq \mathbb{R}^N$ und eine reelle Zahl $p \geq 1$. Dann ist der Vektorraum $\mathcal{L}^p(A)$ bezüglich der Norm $\|f\|_p = (\int_A |f|^p d\lambda_N)^{1/p}$ ein Banachraum.

Bevor wir diesen Satz beweisen, wollen wir auf den fundamentalen Unterschied zwischen der *punktweisen* Konvergenz einer Funktionenfolge in $\mathcal{L}^p(A)$ und der Konvergenz *bezüglich der Norm* $\|\cdot\|_p$ hinweisen. Wir bereiten den Beweis des Satzes 6.9.6 mit einem Hilfssatz vor.

6.9.7 Hilfssatz: Ist eine Funktionenreihe $(\sum_{k=1}^n f_k)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_k \in \mathcal{L}^p(A)$ absolut konvergent, so ist sie konvergent mit Grenzfunktion in $\mathcal{L}^p(A)$, d.h., es gibt ein $f \in \mathcal{L}^p(A)$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sum_{k=1}^n f_k\|_p = 0. \quad (6.79)$$

Darüber hinaus gilt hinsichtlich punktweiser Konvergenz die Beziehung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(x) = f(x) \quad \text{für fast alle } x \in A. \quad (6.80)$$

Beweis des Hilfssatzes: Wir setzen $F := \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p$ und $v_k := |f_1| + \dots + |f_k|$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Funktionen v_k liegen dann in $\mathcal{L}^p(A)$, und wegen (6.76) gilt die Abschätzung $\|v_k\|_p \leq \|f_1\|_p + \dots + \|f_k\|_p \leq F$, d.h.

$$\int_A v_k^p d\lambda_N \leq F^p.$$

Die Funktion $v := \lim_{k \rightarrow \infty} v_k = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ ist meßbar, und mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt

$$\int_A v^p d\lambda_N \leq F^p.$$

Also gilt $v \in \mathcal{L}^p(A)$ und $\|v\|_p \leq F$. Insbesondere gilt daher $v(x) < \infty$ für fast alle $x \in A$, d.h. für alle $x \in A \setminus N$, wobei N eine Nullmenge des \mathbb{R}^N ist. Für jedes $x \in A \setminus N$ ist dann die reelle Reihe $(\sum_{k=1}^n f_k(x))_{n \in \mathbb{N}}$ absolut konvergent, d.h., für jedes $x \in A \setminus N$ gibt es (nach Satz 2.6.9 und wegen der Vollständigkeit von \mathbb{R}) eine reelle Zahl

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x).$$

Die hiermit definierte Funktion $f : A \setminus N \rightarrow \mathbb{R}$ ergänzen wir nun für alle $x \in N$ durch den Wert 0 und erhalten so eine auf ganz A definierte Funktion f . Diese ist ein Element von $\mathcal{L}^p(A)$, denn es gilt $|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| = v(x)$ für fast alle $x \in A$, und sie genügt offensichtlich der Beziehung (6.80).

Zum Nachweis von (6.79) betrachten wir nun die Summen $s_n := f_1 + \dots + f_n$. Für die gilt $|f - s_n| \leq |f| + |s_n| \leq v + |f_1| + \dots + |f_n| \leq v + v = 2v$ und weiter $|f - s_n|^p \leq 2^p v^p$. Da v^p in $\mathcal{L}^p(A)$ liegt, gilt dies auch für $|f - s_n|$, und mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A |f - s_n|^p d\lambda_N = \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} |f - s_n|^p d\lambda_N = 0,$$

d.h., $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sum_{k=1}^n f_k\|_p = 0$. Damit ist auch (6.79) gezeigt. \blacksquare

Beweis von Satz 6.9.6: Es sei $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^p(A)$. Wir wählen eine beliebige Folge $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$ positiver Zahlen mit $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$. Da es wegen der Cauchy-Folgen-Eigenschaft von $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $l_k \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\|h_i - h_j\|_p < \varepsilon_k \quad \text{für alle } i, j \geq l_k,$$

können wir eine solche Folge $(l_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wählen und o. B. d. A. annehmen, daß sie streng monoton wachsend ist. Wir betrachten nun die gemäß der Festsetzung $g_k := h_{l_k}$ definierte Teilfolge von $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und setzen

$$f_1 := g_1, \quad f_k := g_k - g_{k-1} \quad \text{für alle } k \geq 2,$$

was insbesondere die Beziehung $g_n = \sum_{k=1}^n f_k$ nach sich zieht. Auf die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist der Hilfssatz 6.9.7 anwendbar, denn es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p &= \|f_1\|_p + \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{k+1}\|_p = \|f_1\|_p + \sum_{k=1}^{\infty} \|g_{k+1} - g_k\|_p = \\ &= \|f_1\|_p + \sum_{k=1}^{\infty} \|h_{l_{k+1}} - h_{l_k}\|_p \leq \|f_1\|_p + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty. \end{aligned}$$

Der Hilfssatz 6.9.7 liefert dann ein $f \in \mathcal{L}^p(A)$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - h_{l_n}\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sum_{k=1}^n f_k\|_p \stackrel{(6.79)}{=} 0.$$

Damit ist für die Cauchy-Folge $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die Funktion f als in $\mathcal{L}^p(A)$ liegender Häufungswert nachgewiesen, und dieser ist nach Satz 2.4.5 sogar der Grenzwert dieser Folge. Insgesamt ist damit die Vollständigkeit des Vektorraums $\mathcal{L}^p(A)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_p$ nachgewiesen. ■

Wir beschließen unsere Ausführungen zum Lebesgue-Integral mit der Bemerkung, daß die mit dem Satz 6.9.6 nachgewiesene Vollständigkeit der normierten Räume $(\mathcal{L}^p(A), \|\cdot\|_p)$ eine zentrale Bedeutung besitzt für die Weiterentwicklung der elementaren zur sogenannten HÖHEREN ANALYSIS, und daß entsprechend weitreichende Resultate im Rahmen der Riemannschen Integrationstheorie nicht zu erzielen sind. Für weitere Einzelheiten hierzu verweisen wir auf D. Werner, *Funktionalanalysis*, Kapitel I, Abschnitt I.1 und folgende.