Man beachte, daß trotz der Bezeichnung „Negativteil“ die Funktion $f^-(x)$ stets nicht-negative Werte annimmt (siehe Abbildung 6.6). Im übrigen gelten offensichtlich die Beziehungen

$$f \;=\; f^+ - f^- \quad \text{und} \quad |f| \;=\; f^+ + f^- . \tag{6.34}$$

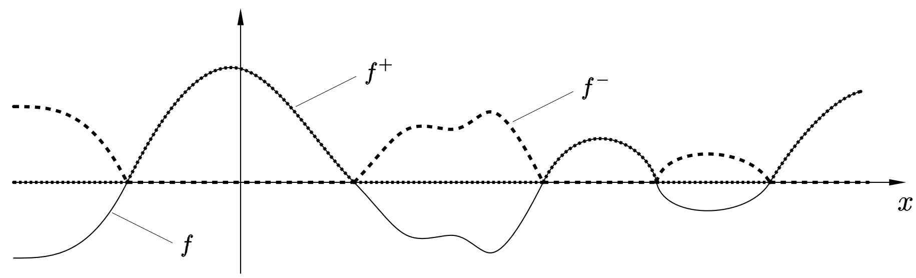

Abb. 6.6 Der Positivteil f^+ und der Negativteil f^- einer Funktion f

Im Hinblick auf den weiteren Ausbau der Theorie definieren wir nun eine einfache, aber besonders wichtige Klasse von meßbaren Funktionen.

6.5.13 Definition: *Gegeben sei ein Meßraum $(X, \mathcal{A})$. Eine reellwertige meßbare Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt* **Treppenfunktion**[1]*, wenn sie nur endlich viele Werte annimmt.*

6.5.14 Beispiel: Ein einfaches aber nichttriviales Beispiel einer Treppenfunktion ist die uns wohlbekannte Dirichlet-Funktion

$$\Delta(x) \;=\; \begin{cases} 1\,, & \text{falls } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0\,, & \text{falls } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\,, \end{cases} \qquad \Delta : [0,1] \to \{0,1\}\,.$$

Sie nimmt nämlich nur zwei Werte an und ist als charakteristische Funktion der meßbaren Menge $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ meßbar (siehe die Beispiele 6.4.2 und 6.5.5). $\Diamond$

Sind f und g zwei Treppenfunktionen, so sind auch die Funktionen $f \pm g$, $f \cdot g$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $|f|$, f^+ und f^- wieder Treppenfunktionen. Sie sind nach Satz 6.5.8 bzw. Korollar 6.5.12 nämlich meßbar und nehmen offensichtlich nur endlich viele (reelle) Werte an.

---

[1] Der Begriff „Treppenfunktion“ wird in der Literatur uneinheitlich verwendet. Zuweilen läßt man auch die Werte $\pm\infty$ zu oder verzichtet auf die Forderung der Meßbarkeit. Treppenfunktionen im Sinne unserer Definition 6.5.13 – gegebenenfalls nur mit nichtnegativen Werten – werden manchmal als *Elementarfunktionen* oder als *einfache* Funktionen bezeichnet.

Ferner stellen wir zum Begriff der Treppenfunktion noch fest, daß sich jede solche Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ in der Form

$$f(x) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; \chi_{A_i}(x) \quad \text{für alle } \; x \in X \tag{6.35}$$

darstellen läßt. Hierbei sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die endlich vielen paarweise verschiedenen Werte von f und die Mengen $A_i \in \mathcal{A}$ sind die paarweise disjunkten, meßbaren f-Urbilder dieser Funktionswerte. Sind umgekehrt $\beta_1, \ldots, \beta_m$ reelle Zahlen (nicht notwendig paarweise verschieden) und $B_1, \ldots, B_m$ meßbare Teilmengen von X (nicht notwendig paarweise disjunkt) mit der Eigenschaft $X = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$, so ist auch die folgende Funktion eine Treppenfunktion:

$$g(x) \;:=\; \sum_{j=1}^{m} \beta_j \; \chi_{B_j}(x) \quad , \quad g : X \to \mathbb{R} \,. \tag{6.36}$$

Der großen Bedeutung für das Nachfolgende wegen beschreiben wir nun im Detail, wie man zu einer gegebenen meßbaren Funktion $f : X \to [0, \infty]$ eine Folge von Treppenfunktionen $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konstruieren kann, die, wie der nachfolgende Satz zeigen wird, für $k \to \infty$ gegen f konvergiert. Zu diesem Zwecke fixieren wir einen beliebigen Folgenindex $k \in \mathbb{N}$ und gehen in drei Schritten vor (siehe Abbildung 6.7 für den Fall $k = 2$).

<u>1. Schritt</u>: Wir zerlegen den Bildbereich $[0, \infty]$ der gegebenen Funktion f zunächst in die beiden Teile $[0, k)$ und $[k, \infty]$. Den beschränkten Teil $[0, k)$ zerlegen wir dann weiter in die $k\,2^k$ gleichlangen Teilintervalle

$$[\,0\;,\;\tfrac{1}{2^k}\,)\;,\;\;[\,\tfrac{1}{2^k}\;,\;\tfrac{2}{2^k}\,)\;,\;\;\ldots\;\;,\;\;[\,k-\tfrac{1}{2^k}\;,\;k\,)\;.$$

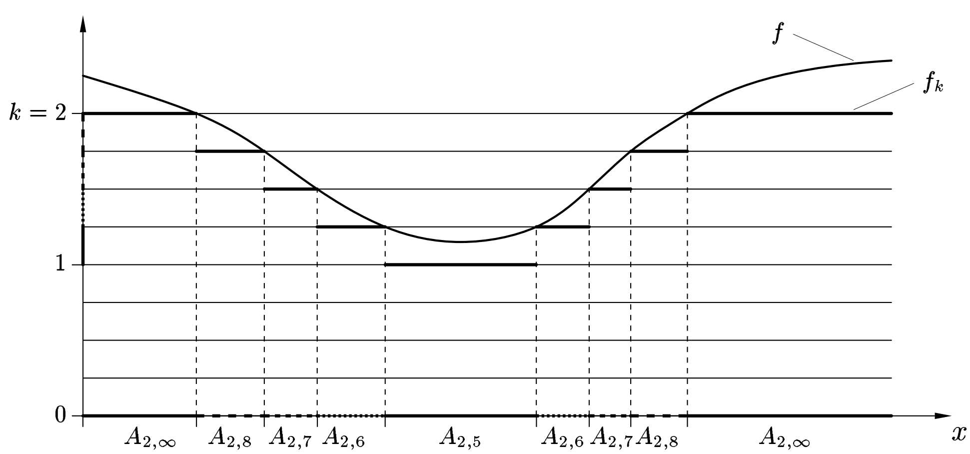

Abb. 6.7 Die Zerlegung des Bildbereichs $[0, \infty]$ von f und die mit Hilfe der Mengen $A_{k,1}, \ldots, A_{k,k\,2^k}\,, A_{k,\infty}$ konstruierte Treppenfunktion f_k

<u>2. Schritt</u>: Wir betrachten die f-Urbilder der $k\,2^k+1$ im 1. Schritt bestimmten Intervalle. Wir bezeichnen sie mit

$$\begin{aligned} A_{k,i} &:= f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^k}\,,\,\frac{i}{2^k}\right)\right)\,, \quad \text{für } i=1,\dots,k\,2^k, \\ A_{k,\infty} &:= f^{-1}\left([k\,,\infty)\right)\,. \end{aligned} \tag{6.37}$$

Diese $k\,2^k+1$ Mengen (von denen einige auch leer sein können) sind meßbar, und sie bilden eine disjunkte Zerlegung des Definitionsbereichs X von f.

<u>3. Schritt</u>: Wir definieren nun die Treppenfunktion

$$f_k(x) \;:=\; \sum_{i=1}^{k\,2^k} \frac{i-1}{2^k}\,\chi_{A_{k,i}}(x) \;+\; k\,\chi_{A_{k,\infty}}(x)\,, \tag{6.38}$$

die wegen der Disjunktheit der Zerlegung $X=\bigcup_{i=1}^{k\,2^k} A_{k,i}\cup A_{k,\infty}$ nur die Werte $0\,,\frac{1}{2^k}\,,\dots,\,\frac{k\,2^k-1}{2^k}\,,k$ annehmen kann. Ferner gilt wegen (6.37)

$$0 \;\le\; f(x)-f_k(x)\;\begin{cases} \le\; \frac{1}{2^k} & \text{für alle } x\in X\setminus A_{k,\infty}\,, \\ =\; f(x)-k & \text{für alle } x\in A_{k,\infty}\,. \end{cases} \tag{6.39}$$

Daß die hiermit konstruierte Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen die meßbare Ausgangsfunktion f in geeigneter Weise approximiert, ist die zentrale Aussage des nun folgenden **Approximationssatzes**.

6.5.15 Satz (über die Approximation von meßbaren Funktionen durch Treppenfunktionen): *Es sei $(X,\mathcal{A})$ ein Meßraum. Dann gilt:*

(a) Eine Funktion $f:X\to\overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann meßbar, wenn es eine Folge von Treppenfunktionen $f_k:X\to\mathbb{R}$, $k=1,2,\dots$ gibt, die gegen f konvergiert.

(b) Im Fall einer nichtnegativen *meßbaren Funktion $f:X\to[0,\infty]$ kann die in (a) beschriebene Folge von Treppenfunktionen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend gewählt werden, d.h. mit der Eigenschaft*

$$0\;\le\; f_1(x)\;\le\; f_2(x)\;\le\;\cdots\;\le\; f_k(x)\;\le\;\cdots \quad \text{für alle } x\in X\,.$$

(c) Im Fall einer (in $\mathbb{R}$) beschränkten *meßbaren Funktion $f:X\to\mathbb{R}$ kann die in (a) beschriebene Folge von Treppenfunktionen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ so gewählt werden, daß die Konvergenz auf X gleichmäßig ist.*

Beweis: Da Treppenfunktionen meßbar sind, ist die Grenzfunktion einer konvergenten Folge von Treppenfunktionen nach der Bemerkung 6.5.11 meßbar.

Es genügt daher zu zeigen, daß sich in jedem der drei betrachteten Fälle die Funktion f in der im Satz beschriebenen Weise approximieren läßt.

(i) Wir beweisen zunächst die Aussage (b), wobei wir als approximierende Treppenfunktionen die in (6.38) definierten Funktionen f_k wählen.
Zur Konvergenz: Ist f an einer Stelle $x \in X$ endlich, so gilt $x \in X \setminus A_{k,\infty}$ für alle $k > f(x)$, und die Konvergenz folgt aus der ersten Zeile von (6.39). Ist dagegen x eine Stelle in X mit $f(x) = \infty$, so gilt $x \in A_{k,\infty}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und die Konvergenz der Folge $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ gegen ∞ folgt aus der zweiten Zeile von (6.39).
Zur Monotonie: Entsprechend der oben geschilderten Vorgehensweise wird das Intervall $[0, k+1)$ disjunkt in $(k+1)2^{k+1}$ Teilintervalle zerlegt, die alle die Länge $\frac{1}{2^{k+1}}$ besitzen. Dies hat zur Folge, daß bei der Konstruktion von f_{k+1} das Intervall $[0, k)$ in doppelt so viele Intervalle zerlegt wird wie bei der Konstruktion von f_k. Dies wiederum impliziert, daß die folgende Beziehung für jedes $k \in \mathbb{N}$ und alle $i = 1, \ldots, k2^k$ gilt (siehe Abbildung 6.8):

$$\begin{aligned} A_{k,i} &= f^{-1}\Big([\tfrac{i-1}{2^k}, \tfrac{i}{2^k})\Big) = f^{-1}\Big([\tfrac{2i-2}{2^{k+1}}, \tfrac{2i-1}{2^{k+1}}) \cup [\tfrac{2i-1}{2^{k+1}}, \tfrac{2i}{2^{k+1}})\Big) \\ &= f^{-1}\Big([\tfrac{2i-2}{2^{k+1}}, \tfrac{2i-1}{2^{k+1}})\Big) \cup f^{-1}\Big([\tfrac{2i-1}{2^{k+1}}, \tfrac{2i}{2^{k+1}})\Big) \qquad (6.40) \\ &= A_{k+1,2i-1} \cup A_{k+1,2i} \, . \end{aligned}$$

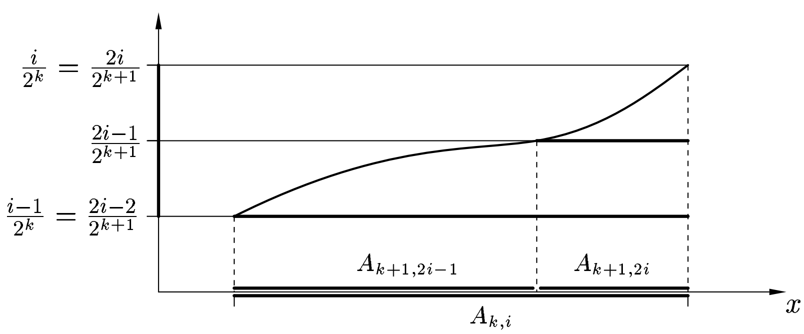

Abb. 6.8 Zum Nachweis der Monotonie der Folge $f_k(x)$

Für ein $x \in X$ mit $f(x) = \infty$ ist das monotone Wachsen der Folge $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ klar, denn in diesem Fall gilt, wie oben gezeigt, $f_k(x) = k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Ist dagegen $f(x)$ endlich, so gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $x \in A_{k,\infty}$ für $k = 1, \ldots, k_0 - 1$ und $x \in X \setminus A_{k,\infty}$ für alle $k \geq k_0$. Damit gilt einerseits

$$f_k(x) = k \quad \text{für } k = 1, \ldots, k_0 - 1 \, ,$$

und andererseits gibt es für jedes $k \geq k_0$ ein $i \in \{1, \ldots, k2^k\}$ mit $x \in A_{k,i}$. Damit gilt dann

$$f_k(x) \overset{(6.38)}{=} \frac{i-1}{2^k} \leq \min\left\{\frac{2i-2}{2^k}, \frac{2i-1}{2^k}\right\} \overset{(6.40)}{\leq} f_{k+1}(x) \quad \text{für alle } k \geq k_0 \, ,$$

so daß insgesamt die behauptete Monotonie der Folge $f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ gezeigt und die Aussage (b) vollständig bewiesen ist.

(ii) Ist die gegebene Funktion $f : X \to [0,\infty]$ beschränkt (in $\mathbb{R}$), mit Werten in $[0,S]$ etwa, so sind die Mengen $A_{k,\infty}$ für alle $k > S$ leer. Aus (6.39) folgt dann

$$0 \;\leq\; f(x) - f_k(x) \;\leq \frac{1}{2^k} \quad \text{für alle } \; x \in X \;,$$

was die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf X und damit die Aussage (c) beweist.

(iii) Der allgemeine Fall (a) einer $\overline{\mathbb{R}}$-wertigen Funktion f läßt sich auf den Fall (b) zurückführen, indem man zunächst f^+ und f^- mittels der gemäß Aussage (b) existierenden Folgen von Treppenfunktionen $(f_k^+)_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(f_k^-)_{k\in\mathbb{N}}$ approximiert und dann die durch $f_k := f_k^+ - f_k^-$ definierte Folge von Treppenfunktionen zur Approximation von f verwendet. ■

6.5.16 Bemerkung: Die Meßbarkeit einer Funktion haben wir bislang nur für Funktionen erklärt, die auf der gesamten Menge X eines Meßraums $(X,\mathcal{A})$ erklärt sind. Da aber jede $\mathcal{A}$-meßbare Teilmenge A von X in kanonischer Weise selbst ein Meßraum ist, wenn man sie mit der von $\mathcal{A}$ über A „induzierten" σ-Algebra $\widetilde{\mathcal{A}} = \{A \cap B \in \mathcal{P}(X) : B \in \mathcal{A}\}$ versieht, ist damit der Begriff der Meßbarkeit auch für jede auf einer Menge $A \in \mathcal{A}$ definierte Funktion $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ erklärt. Insbesondere ist $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ genau dann $\widetilde{\mathcal{A}}$-meßbar, wenn die triviale Fortsetzung

$$f_A(x) \;:=\; \begin{cases} f(x) & \text{für } \; x \in A \,, \\ \;\;0 & \text{für } \; x \in X \setminus A \,, \end{cases} \qquad f_A : X \to \overline{\mathbb{R}}$$

$\mathcal{A}$-meßbar ist. Dies folgt sofort aus der Tatsache, daß für jede Menge $R \in \overline{\mathcal{R}}$ die Beziehung

$$f_A^{-1}(R) \;:=\; \begin{cases} f^{-1}(R)\,, & \text{falls } \; 0 \notin R \\ f^{-1}(R) \cup (X \setminus A)\,, & \text{falls } \; 0 \in R \end{cases}$$

gilt und daß $X \setminus A$ in $\mathcal{A}$ liegt. □