6.4 Das Lebesgue-Maß

In diesem Abschnitt geht es darum, durch Konkretisierung der zuvor auf abstraktem Niveau erzielten Ergebnisse den Jordan-Inhalt zu einem Maß fortzusetzen und auf diesem Wege den für die ANALYSIS zentralen Maßbegriff einzuführen, das Lebesgue-Maß. Wir erinnern in diesem Zusammenhang daran, daß wir bereits wissen, daß die mit $\mathcal{J}_N$ bezeichnete Menge der Jordan-meßbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^N$ einen Ring bildet, und daß wir im Hinblick auf die Anwendung des Fortsetzungssatzes 6.3.4 noch zeigen müssen, daß der Jordan-Inhalt $J_N : \mathcal{J}_N \to [0, \infty)$ ein Prämaß im Sinne der Definition 6.2.1 ist.

6.4.1 Satz (der Jordan-Inhalt als Prämaß): *Der auf dem Ring $\mathcal{J}_N$ der Jordan-meßbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^N$ erklärte Jordan-Inhalt $J_N : \mathcal{J}_N \to [0, \infty)$ ist ein Prämaß.*

Beweis: Im Hinblick auf die Verifikation der Bedingungen (a) und (b) der Definition 6.2.1 stellen wir zunächst fest, daß die Beziehung $J_N(\emptyset) = 0$ auf Grund der Definition 5.7.1 des Jordan-Inhalts trivialerweise erfüllt ist.

Zum Nachweis von (b) sei nun $(R_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine paarweise disjunkte Folge von Mengen aus $\mathcal{J}_N$ mit der Eigenschaft, daß die Menge $R := \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ in $\mathcal{J}_N$ liegt. Zu beweisen ist dann die Identität $J_N(R) = \sum_{i=1}^{\infty} J_N(R_i)$.

Die Ungleichung $J_N(R) \geq \sum_{i=1}^{\infty} J_N(R_i)$ ergibt sich sofort aus der für alle $n \in \mathbb{N}$ gültigen Inklusion $\bigcup_{i=1}^{n} R_i \subseteq R$, denn nach Satz 5.7.7 folgt hieraus zunächst $J_N(R) \geq J_N(\bigcup_{i=1}^{n} R_i) = \sum_{i=1}^{n} J_N(R_i)$, und den Rest der Begründung liefert der Grenzübergang $n \to \infty$.

Um jetzt zu zeigen, daß auch die Ungleichung $J_N(R) \leq \sum_{i=1}^{\infty} J_N(R_i)$ gilt, wählen wir ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Da R Jordan-meßbar ist, ist der Rand von R nach Satz 5.7.6 eine Nullmenge, d.h., es gibt gemäß Folgerung 5.2.9 zunächst abzählbar viele und unter Verwendung der Kompaktheit von ∂R schließlich endlich viele offene Quader $Q_{0,1}, \ldots, Q_{0,n_0}$ mit $\partial R \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_0} Q_{0,j}$ und

$$\sum_{j=1}^{n_0} J_N(Q_{0,j}) \;\leq\; \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6.17}$$

Als nächstes stellen wir fest, daß es für jedes $i \in \mathbb{N}$ wegen der Jordan-Meßbarkeit von R_i endlich viele Quader $Q_{i,1}, \ldots, Q_{i,n_i}$ mit $R_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_i} Q_{i,j}$ und

$$\sum_{j=1}^{n_i} J_N(Q_{i,j}) \;\leq\; J_N(R_i) \;+\; \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \tag{6.18}$$

gibt. Auch hier können wir die überdeckenden Quader wieder als offen annehmen (vgl. die Begründung zur Folgerung 5.2.9). Insgesamt haben wir mit den

Quadern $Q_{0,1}, \ldots, Q_{0,n_0}, \ldots, Q_{1,1}, \ldots, Q_{1,n_1}, Q_{2,1}, \ldots$ eine offene Überdeckung von $\overline{R}$ gefunden, von der wir wegen der Kompaktheit von $\overline{R}$ (wegen $R \in \mathcal{J}_N$ ist R beschränkt) eine endliche Teilüberdeckung auswählen können, deren Quader wir mit $\widetilde{Q}_1, \ldots, \widetilde{Q}_m$ bezeichnen. Damit erhalten wir, wenn wir noch die Bemerkung 2.6.13 zur Umordnung von Reihen beachten,

$$J_N(R) \le J_N(\overline{R}) \le J_N\Big(\bigcup_{k=1}^{m} J_N(\widetilde{Q}_k)\Big) \le \sum_{k=1}^{m} J_N(\widetilde{Q}_k) \le \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i} J_N(Q_{i,j})$$

$$\overset{(6.17)}{\le} \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i} J_N(Q_{i,j}) \overset{(6.18)}{\le} \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} J_N(R_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \sum_{i=1}^{\infty} J_N(R_i) + \varepsilon\,.$$

Da die hiermit bewiesene Abschätzung $J_N(R) \le \sum_{i=1}^{\infty} J_N(R_i) + \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt, ist die noch ausstehende Ungleichung $J_N(R) \le \sum_{i=1}^{\infty} J_N(R_i)$ gezeigt und der Beweis des Satzes 6.4.1 beendet. ■

Nachdem nun der Jordan-Inhalt $J_N : \mathcal{J}_N \to [0,\infty)$ als Prämaß erkannt ist, können wir auf die Menge $X := \mathbb{R}^N$, den Ring $\mathcal{R} := \mathcal{J}_N$ über X und das Prämaß $\rho := J_N$ den Satz 6.3.4 anwenden. Dies liefert zunächst das vermittels

$$\boxed{\lambda_N^*(A) := \inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty} J_N(R_i) : R_1, R_2, \ldots \in \mathcal{J}_N \text{ und } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i\Big\}} \tag{6.19}$$

definierte äußere Maß $\lambda_N^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0,\infty]$, das wir N-dimensionales **äußeres Lebesgue-Maß** nennen. Die zugehörige σ-Algebra

$$\mathcal{L}_N := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) : A \text{ ist } \lambda_N^*\text{-meßbar}\} \tag{6.20}$$

heißt **Lebesguesche-$\boldsymbol{\sigma}$-Algebra**, und das gemäß

$$\lambda_N(A) := \lambda_N^*(A)\,, \quad \lambda_N : \mathcal{L}_N \to [0,\infty] \tag{6.21}$$

definierte Maß heißt N-dimensionales **Lebesgue-Maß**. Die Mengen aus $\mathcal{L}_N$ nennen wir **Lebesgue-meßbar**, und den Maßraum $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_N, \lambda_N)$ bezeichnen wir als N-dimensionalen **Lebesgueschen Maßraum**. Im Fall $N = 1$ schreiben wir hierfür auch $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$.

Vergleicht man die Konstruktion des Lebesgue-Maßes mit der des Jordan-Inhalts, so fällt auf, daß bei der Definition (6.19) des äußeren Lebesgue-Maßes $\lambda_N^*(A)$ *abzählbar unendliche* Überdeckungen der Menge A zugelassen sind, während beim äußeren Jordan-Inhalt $\overline{J}_N(A)$ (vgl. Definition 5.7.1) nur *endliche* Überdeckungen erlaubt sind. Hinzu kommt noch, daß im Fall des Lebesgue-Maßes die überdeckenden Mengen Jordan-meßbar sein dürfen und im Fall des Jordan-Inhalts nur Quader. Insgesamt darf man also erwarten, daß das

Lebesgue-Maß ein wesentlich feineres Werkzeug zum messen von Teilmengen des $\mathbb{R}^N$ ist als der Jordan-Inhalt, und daß man daher mit Hilfe des Lebesgue-Maßes wesentlich mehr Mengen messen kann als mit dem Jordan-Inhalt. Daß dies in der Tat so ist, zeigt ein Vergleich des Satzes 6.3.2 über die Eigenschaften allgemeiner Maße mit dem Satz 5.7.7, in dem die Eigenschaften des Jordan-Inhalts zusammengefaßt sind. Daß darüber hinaus das Lebesgue-Maß wegen der speziellen Struktur des zu Grunde liegenden Raumes $\mathbb{R}^N$ aber noch mehr als die allen Maßen gemeinsamen Eigenschaften besitzt, wollen wir im weiteren Verlauf dieses Abschnitts noch zeigen.

Zuvor halten wir jedoch fest, daß auf Grund der Konstruktion des Lebesgue-Maßes alle Jordan-meßbaren Mengen auch Lebesgue-meßbar sind, und daß das Lebesgue-Maß einer Jordan-meßbaren Menge mit deren Jordan-Inhalt übereinstimmt. Das bedeutet insbesondere, daß für jeden Quader $Q(a,b)$, der mittels zweier Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^N$ mit $a_i \leq b_i$ für alle $i = 1, \dots, N$ durch die Beziehung

$$(a_1, b_1) \times \dots \times (a_N, b_N) \;\subseteq\; Q(a,b) \;\subseteq\; [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N]$$

beschrieben werden kann, die Formel

$$\lambda_N(Q(a,b)) \;=\; \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i) \tag{6.22}$$

gilt (vgl. (5.2)). Für $N = 1$ liefert (6.22) in der Form $\lambda(Q(a,b)) = b - a$ auch das Lebesgue-Maß der vier beschränkten Intervalltypen $[a,b]$, $[a,b)$, $(a,b]$ und (a,b). Für die fünf unbeschränkten Intervalltypen gilt dagegen

$$\lambda((-\infty, b]) = \lambda((-\infty, b)) = \lambda([a, \infty)) = \lambda((a, \infty)) = \lambda((-\infty, \infty)) = \infty\,,$$

wie man leicht mit Hilfe der Stetigkeit des Lebesgue-Maßes von unten sehen kann. Exemplarisch kann man im Fall des Intervalls $(-\infty, b]$ etwa die Intervallfolge $((b-n, b])_{n\in\mathbb{N}}$ wählen und dann mittels Satz 6.3.2 (8) auf die Beziehung $\lambda((-\infty, b]) = \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty}(b-n, b]) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda((b-n, b]) = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ schließen.

6.4.2 Beispiel: Daß die Standardbeispiele nicht Jordan-meßbarer Mengen

$$[0,1] \cap \mathbb{Q} \quad \text{und} \quad [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

Lebesgue-meßbar sind, läßt sich wie folgt erkennen. Ist $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von $[0,1] \cap \mathbb{Q}$, so ist $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ die Vereinigung der paarweise disjunkten Folge $(\{a_i\})_{i\in\mathbb{N}}$, und da jede der einpunktigen Mengen $\{a_i\}$ das Lebesgue-Maß (wie auch den Jordan-Inhalt) 0 besitzt, hat wegen der σ-Additivität von Maßen auch die Menge $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ das Lebesgue-Maß 0. Insgesamt erhalten wir damit, wenn wir noch die Beziehung (4) des Satzes 6.3.2 verwenden,

$$\lambda(\,[0,1] \cap \mathbb{Q}\,) \;=\; 0 \quad \text{und} \quad \lambda(\,[0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})\,) \;=\; 1\,. \qquad \Diamond$$

Die Beschreibung weiterer Eigenschaften des Lebesgue-Maßes beginnen wir mit der Charakterisierung der λ_N-Nullmengen, die wir fortan auch **Lebesgue-Nullmengen** oder kurz **Nullmengen** nennen.

6.4.3 Satz (Charakterisierung von Lebesgue-Nullmengen): *Für jede Menge $A \subseteq \mathbb{R}^N$ sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

(i) $\lambda_N^*(A) = 0$,

(ii) A ist eine Lebesgue-Nullmenge,

(iii) A ist eine Nullmenge im Sinne der Definition 5.2.6.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Aus der Beziehung $\lambda_N^*(A) = 0$ folgt, da λ_N^* als äußeres Maß monoton ist, für alle $P \subseteq \mathbb{R}^N$ zunächst $\lambda_N^*(P \cap A) = 0$ und weiter

$$\lambda_N^*(P) \;\geq\; \lambda_N^*(P \cap C_{\mathbb{R}^N}(A)) \;=\; \lambda_N^*(P \cap A) + \lambda_N^*(P \cap C_{\mathbb{R}^N}(A)) \,.$$

Folglich ist A gemäß Definition 6.2.6 ein Element von $\mathcal{L}_N$, und wegen (6.21) gilt dann $\lambda_N(A) = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Gilt $\lambda_N(A) = 0$, so wegen (6.21) auch $\lambda_N^*(A) = 0$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann gemäß Definition (6.19) und Bemerkung 6.2.4 eine Mengenfolge $R_1, R_2, \ldots \in \mathcal{J}_N$ mit $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ und

$$\sum_{i=1}^{\infty} J_N(R_i) \;<\; \frac{\varepsilon}{2} \,. \tag{6.23}$$

Ferner gibt es zu jeder der Mengen R_i, da sie alle in $\mathcal{J}_N$ liegen, endliche viele Quader $Q_{i,1}, \ldots, Q_{i,n_i}$ mit $R_i \subseteq \bigcup_{j=1}^{n_i} Q_{i,j}$ und

$$\sum_{j=1}^{n_i} J_N(Q_{i,j}) \;\leq\; J_N(R_i) \;+\; \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \,. \tag{6.24}$$

Die Quaderfolge $Q_{1,1}, \ldots, Q_{1,n_1}, Q_{2,1}, \ldots, Q_{2,n_2}, Q_{3,1}, \ldots$ bildet dann eine Überdeckung der Menge $\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i$ (und damit auch von A), für deren Quadersumme wegen (6.23) und (6.24) (unter Verwendung der Bemerkung 2.6.13 zur Umordnung von Reihen) folgendes gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n_i} J_N(Q_{i,j}) \;&=\; \sum_{i=1}^{\infty}\Big[\sum_{j=1}^{n_i} J_N(Q_{i,j}) - J_N(R_i)\Big] + \sum_{i=1}^{\infty} J_N(R_i) \\ &\leq\; \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} \;+\; \frac{\varepsilon}{2} \;=\; \varepsilon \,.\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir damit eine gemäß Definition 5.2.6 erforderliche Quaderüberdeckung von A nachgewiesen.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Ist A eine Nullmenge gemäß Definition 5.2.6, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ abzählbar viele Quader $Q_1, Q_2, \ldots$ mit $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$ und $\sum_{i=1}^{\infty} J_N(Q_i) < \varepsilon$. Da Quader Jordan-meßbar sind, d. h. in $\mathcal{J}_N$ liegen, liefert die Definition (6.19) die Abschätzung $\lambda_N^*(A) < \varepsilon$, und da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $\lambda_N^*(A) = 0$. ■

Wir wollen nun ein Beispiel einer Nullmenge vorstellen, die in mehrfacher Hinsicht bemerkenswert, der Anschauung aber weitgehend unzugänglich ist. Es handelt sich um eine sogenannte **Cantor-Menge**, ein klassisches Beispiel für eine Menge, die man als „Fraktal“ bezeichnet.

6.4.4 Beispiel: Wir konstruieren eine Teilmenge des Intervalls $[0, 1]$, indem wir zunächst das mittlere Drittel dieses Intervalls entfernen und dann mit den beiden Intervallen der verbleibenden Menge

$$C_1 := [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1]$$

genauso verfahren. Dies liefert die Menge

$$C_2 := [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1] .$$

So fortfahrend konstruieren wir rekursiv eine Folge von Mengen C_i, die aus jeweils 2^i paarweise disjunkten Intervallen der Länge 3^{-i} bestehen, und für die $C_{i+1} \subset C_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Schließlich definieren wir die sogenannte

$$\textbf{(Mitteldrittel-) Cantor-Menge} \quad C := \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i .$$

Man nennt die Menge C auch **Cantorsches Diskontinuum**, da alle ihre Zusammenhangskomponenten einpunktig sind. Dies erkennt man sofort daran, daß die Menge C auf Grund ihres Zustandekommens kein Intervall mit positiver Länge enthalten kann.

Wollte man nun die Lebesgue-Meßbarkeit der Menge C mit Hilfe ihrer einpunktigen Teilmengen begründen (wie etwa im Beispiel 6.4.2), so wäre man zum Scheitern verurteilt, denn C ist (was wir nicht beweisen wollen) nicht abzählbar. Daß C aber dennoch Lebesgue-meßbar und sogar eine Lebesgue-Nullmenge ist, folgt sofort aus der Stetigkeit des Lebesgue-Maßes von oben (siehe Satz 6.3.2 (9)), denn es gilt

$$\lambda(C) = \lambda\Big(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i\Big) = \lim_{i\to\infty} \lambda(C_i) = \lim_{i\to\infty} 2^i \cdot 3^{-i} = 0 .$$

Abschließend stellen wir noch fest, daß das Cantorsche Diskontinuum (neben weiteren interessanten Eigenschaften, auf die wir hier aber nicht eingehen wollen) die scheinbar widersprüchliche Eigenschaft besitzt, „groß“ zu sein im mengentheoretischen Sinne, nämlich überabzählbar, als Nullmenge aber „klein“ im Sinne der Maßtheorie. ◊

Wir wenden uns nun der Frage zu, welche Typen von Teilmengen des $\mathbb{R}^N$ Lebesgue-meßbar sind. Wir werden diese Frage nicht vollständig beantworten, aber eine sehr große Klasse von Lebesgue-meßbaren Mengen angeben, nämlich die mit

$$\mathcal{B}_N := \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$$

bezeichnete, von den offenen Mengen des $\mathbb{R}^N$ erzeugte, Borelsche σ-Algebra. Diese enthält bekanntlich neben allen offenen auch alle abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^N$ und alle Mengen, die sich mit Hilfe der in jeder σ-Algebra zulässigen Mengenoperationen aus offenen und abgeschlossenen Mengen erzeugen lassen. Zum Vergleich mit dem Jordan-Inhalt sei an dieser Stelle bemerkt, daß es offene Mengen im $\mathbb{R}^N$ gibt, die nicht Jordan-meßbar sind (siehe Übungsaufgabe 29).

6.4.5 Satz (Lebesgue-Meßbarkeit der Borelschen Mengen): *Für die σ-Algebra $\mathcal{B}_N$ der Borelschen Teilmengen des $\mathbb{R}^N$ gilt $\mathcal{B}_N \subseteq \mathcal{L}_N$. Die Einschränkung $\beta_N := \lambda_N|_{\mathcal{B}_N}$ des Lebesgue-Maßes λ_N auf $\mathcal{B}_N$ nennt man* **Lebesgue-Borel-Maß** *oder kurz* **Borel-Mass**.

Beweis: Wir bezeichnen mit $\mathcal{Q}_N$ die Menge aller Quader im $\mathbb{R}^N$ und zeigen, daß die von $\mathcal{Q}_N$ erzeugte σ-Algebra $\sigma(\mathcal{Q}_N)$ der Inklusionskette

$$\mathcal{B}_N \subseteq \sigma(\mathcal{Q}_n) \subseteq \mathcal{L}_N \tag{6.25}$$

genügt, was dann offensichtlich die zu beweisende Beziehung liefert. Die rechte Inklusion in (6.25) folgt sofort aus der Tatsache, daß jeder Quader Lebesgue-meßbar ist, und daher die σ-Algebra $\mathcal{L}_N$ die kleinste $\mathcal{Q}_N$ umfassende σ-Algebra $\sigma(\mathcal{Q}_N)$ enthält.

Zum Nachweis der linken Inklusion in (6.25) genügt es zu zeigen, daß jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ in $\sigma(\mathcal{Q}_N)$ liegt, denn $\mathcal{B}_N$ ist definitionsgemäß die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen des $\mathbb{R}^N$ enthält. Gegeben sei also eine beliebige offene Menge $M \subseteq \mathbb{R}^N$. Um zu zeigen, daß sich M als abzählbare Vereinigung offener $\mathbb{R}^N$-Quader (und damit als Element von $\sigma(\mathcal{Q}_N)$) darstellen läßt, betrachten wir das mit $\mathcal{Q}_N^r$ bezeichnete System aller offenen $\mathbb{R}^N$-Quader der Form $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_N, b_N)$, die ganz in M liegen und rationale „Randpunkte“ $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ besitzen. Daß für dieses Quadersystem dann neben der trivialen Inklusion $\bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_N^r} Q \subseteq M$ auch die Umkehrung gilt, ergibt sich sofort aus der Tatsache, daß es zu jedem Punkt x der offenen Menge M einen ganz in M liegenden offenen Quader $R \in \mathcal{Q}_N$ mit $x \in R$ gibt, und daß folglich R einen Quader $Q \in \mathcal{Q}_N^r$ mit $x \in Q \subseteq M$ enthält. ■

Das Zurückliegende zusammenfassend halten wir mit Blick auf die Abbildung 6.3 die beiden Inklusionsketten

$$\mathcal{Q}_N \subset \mathcal{J}_N \subset \mathcal{L}_N \subset \mathcal{P}_N \quad \text{und} \quad \mathcal{Q}_N \subset \mathcal{B}_N \subset \mathcal{L}_N \subset \mathcal{P}_N \tag{6.26}$$

fest, bei denen $\mathcal{Q}_N$ die Menge aller Quader des $\mathbb{R}^N$ bezeichnet, $\mathcal{J}_N$ den Ring der Jordan-meßbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^N$, $\mathcal{B}_N$ die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{L}_N$ die Lebesguesche σ-Algebra des $\mathbb{R}^N$ und $\mathcal{P}_N$ die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$. Ohne dies in allen Fällen zu beweisen, teilen wir schließlich noch mit, daß keine zwei der fünf in (6.26) auftretenden Mengensysteme identisch sind und daß zwischen $\mathcal{J}_N$ und $\mathcal{B}_N$ keine der beiden möglichen Inklusionen gilt.

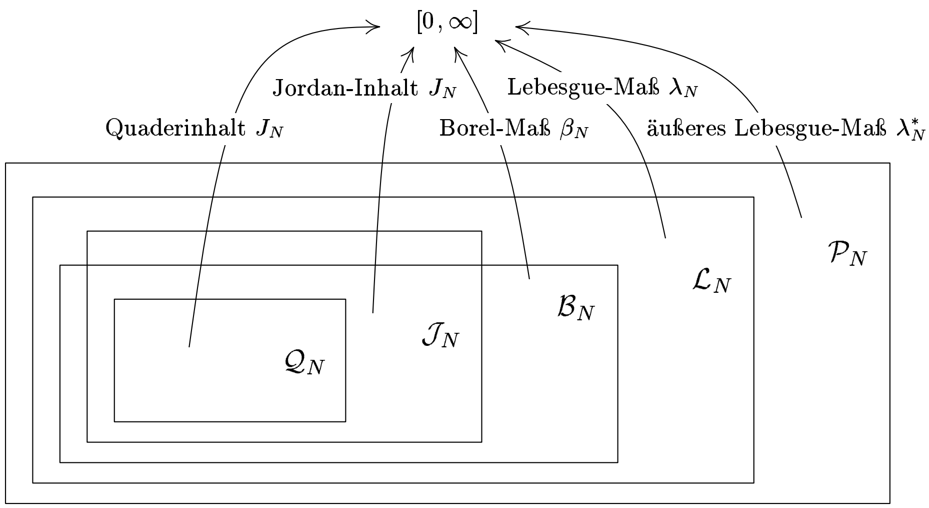

Abb. 6.3 Zur Hierarchie der behandelten Mengensysteme und der zugehörigen Inhalts- bzw. Maßbegriffe: $\mathcal{Q}_N$ ist die Menge der Quader im $\mathbb{R}^N$, $\mathcal{J}_N$ der Ring der Jordan-meßbaren Mengen, $\mathcal{B}_N$ die Borelsche σ-Algebra, $\mathcal{L}_N$ die Lebesguesche σ-Algebra und $\mathcal{P}_N$ die Potenzmenge des $\mathbb{R}^N$.

Bevor wir den Abschnitt über das Lebesgue-Maß mit einem Beispiel einer nicht-Lebesgue-meßbaren Menge beenden, wollen wir kurz auf die Frage eingehen, inwieweit die Lebesgue-Meßbarkeit einer Menge bei Anwendung einer Abbildung erhalten bleibt. Wir werden die Aussage, die wir hierzu in der nachfolgenden Bemerkung machen, nicht eigens beweisen, denn sie wird sich später als einfache Konsequenz aus dem Transformationssatz für das Lebesgue-Integral ergeben.

6.4.6 Bemerkung: Ist $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ eine affine Abbildung $g(x) = Gx + b$ mit invertierbarer Matrix $G \in \mathbb{R}^{N \times N}$ und beliebigem Vektor $b \in \mathbb{R}^N$, so ist das Bild jeder Lebesgue-meßbaren Menge $A \subseteq \mathbb{R}^N$ Lebesgue-meßbar, und es gilt

$$\lambda_N(g(A)) = |\det G| \cdot \lambda_N(A). \tag{6.27}$$

Von besonderem Interesse sind hierbei die sog. **Bewegungen** und **Translationen**, die dadurch ausgezeichnet sind, daß die Matrix G orthogonal bzw. die Einheitsmatrix ist. Da in diesen Fällen bekanntlich $|\det G| = 1$ gilt, sagt man auch, das Lebesgue-Maß sei **bewegungs-** und **translationsinvariant**. $\square$

Wir stellen nun abschließend eine Teilmenge des Intervalls $[0,1]$ vor, die nicht Lebesgue-meßbar ist. Der Tatsache, daß die Konstruktion dieser Menge und die Begründung für ihre Nicht-Meßbarkeit recht aufwendig sind, darf man durchaus entnehmen, daß es sich bei nicht-Lebesgue-meßbaren Mengen generell um ziemliche exotische Gebilde handelt.

6.4.7 Beispiel: Um die gesuchte Menge zu konstruieren, definieren wir für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ die „um ξ verschobene Menge der rationalen Zahlen" $\mathbb{Q}_\xi := \{\xi + r : r \in \mathbb{Q}\}$ und betrachten das Mengensystem

$$\mathcal{M} := \{\mathbb{Q}_\xi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \ \xi = 0 \ \text{ oder } \ \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}.$$

Da jede Menge aus $\mathcal{M}$ mit dem Intervall $[0,1]$ einen nichtleeren Durchschnitt hat, können wir eine Teilmenge A von $[0,1]$ konstruieren, indem wir von jeder Menge aus $\mathcal{M}$ ein (und nur ein) beliebiges Element aus $[0,1]$ auswählen.

Um nun mit einem indirekten Beweis zu zeigen, daß die so definierte Menge A nicht Lebesgue-meßbar ist, nehmen wir das Gegenteil an, also ihre Meßbarkeit. Wegen der Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes (vgl. Bemerkung 6.4.6) ist dann auch jede der Mengen $A_q := \{q + a : a \in A\}$, $q \in \mathbb{Q}$, Lebesgue-meßbar, und es gilt

$$\lambda(A_q) = \lambda(A) \quad \text{für alle } \ q \in \mathbb{Q}. \tag{6.28}$$

Wir zeigen nun als nächstes, daß das Mengensystem

$$\mathcal{A} := \{A_q \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : q \in \mathbb{Q}\}$$

eine disjunkte Zerlegung von $\mathbb{R}$ darstellt.

(i) Zum Nachweis der paarweisen Disjunktheit der Mengen A_q, $q \in \mathbb{Q}$, machen wir die Widerspruchsannahme $A_{q_1} \cap A_{q_2} \neq \emptyset$ für $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ mit $q_1 \neq q_2$. Ist α dann ein Element von $A_{q_1} \cap A_{q_2}$, so gibt es zwei reelle Zahlen $a_1, a_2 \in A$ mit

$$a_1 \neq a_2 \quad \text{und} \quad \alpha = q_1 + a_1 = q_2 + a_2. \tag{6.29}$$

Nach Konstruktion der Menge A gibt es ferner zwei $\xi_1, \xi_2 \in \{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ mit $a_1 \in \mathbb{Q}_{\xi_1}$ und $a_2 \in \mathbb{Q}_{\xi_2}$, und wegen $a_1 \neq a_2$ impliziert dies

$$\mathbb{Q}_{\xi_1} \neq \mathbb{Q}_{\xi_2}. \tag{6.30}$$

Andererseits gibt es gemäß der Definition der Mengen $\mathbb{Q}_\xi$ wegen $a_1 \in \mathbb{Q}_{\xi_1}$ und $a_2 \in \mathbb{Q}_{\xi_2}$ zwei rationale Zahlen r_1, r_2 mit $a_1 = \xi_1 + r_1$ und $a_2 = \xi_2 + r_2$. Zusammen mit (6.29) impliziert dies

$$q_1 + \xi_1 + r_1 = q_2 + \xi_2 + r_2.$$

Dies wiederum bedeutet, da q_1, q_2, r_1, r_2 rational sind, daß $\xi_1 - \xi_2$ rational ist, und folglich $\mathbb{Q}_{\xi_1} = \mathbb{Q}_{\xi_2}$ gilt. Dieser Widerspruch zu (6.30) beweist schließlich die paarweise Disjunktheit der Mengen A_q, $q \in \mathbb{Q}$.

(ii) Um als nächstes den nichttrivialen Teil der Mengenidentität

$$\bigcup_{A_q \in \mathcal{A}} A_q \;=\; \mathbb{R} \tag{6.31}$$

zu zeigen, wählen wir eine beliebige reelle Zahl ρ. Nach Konstruktion der Mengen $\mathbb{Q}_\xi$ gibt es dann ein $\xi \in \{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ mit $\rho \in \mathbb{Q}_\xi$, nämlich $\xi := 0$ im Fall $\rho \in \mathbb{Q}$ und $\xi := \rho$ sonst. Damit existieren dann ein $a \in A$ und ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $\rho = a + r$, und das bedeutet, daß ρ ein Element von A_r ist und damit ein Element der Vereinigungsmenge auf der linken Seite von (6.31).

(iii) Nach (i) sind insbesondere die Mengen $A_{1/i}$, $i \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt. Da sie zudem alle im Intervall $[0,2]$ liegen, gilt für jede natürliche Zahl n

$$n \cdot \lambda(A) \overset{(6.28)}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda(A_{1/i}) \;=\; \lambda\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_{1/i}\Big) \;\leq\; \lambda([0,2]) \;=\; 2\,.$$

Da dies für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, erhalten wir $\lambda(A) = 0$ und damit (wegen (6.28))

$$\lambda(A_q) \;=\; 0 \quad \text{für alle } q \in \mathbb{Q}\,. \tag{6.32}$$

(iv) Um den Beweis zu beenden, betrachten wir nun eine Abzählung $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von $\mathbb{Q}$ und die zugehörige Mengenfolge $(A_{r_i})_{i \in \mathbb{N}}$. Damit gilt dann

$$\lambda(\mathbb{R}) \overset{(6.31)}{=} \lambda\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{r_i}\Big) \overset{\text{(i)}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(A_{r_i}) \overset{(6.32)}{=} 0\,.$$

Diese zu $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$ widersprüchliche Beziehung beendet schließlich den Beweis, daß die oben konstruierte Menge A nicht Lebesgue-meßbar ist. $\Diamond$

Abschließend sei noch erwähnt, daß die Möglichkeit der Konstruktion der Menge A im vorherigen Beispiel mit Hilfe des dort angewandten „Auswahlverfahrens“ dem gesunden Menschenverstand keine Probleme bereitet, aus mathematisch-axiomatischer Sicht jedoch nicht so selbstverständlich ist. Es beruht vielmehr auf dem sogenannten „Auswahlaxiom“ der Mengenlehre.