Prof. Dr. B. Aulbach
Dr. C. Gugg
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

12. Dezember 2002

Analysis III

9. Übungsblatt

Abgabetermin für die Übungsaufgaben ist Freitag, der 20.12.2002, 10:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungen (ordentlich zusammengeheftet) in die dafür vorgesehenen Briefkästen in der Eingangshalle des Instituts für Mathematik. Schreiben Sie bitte auf die Aufgabenblätter Ihren Namen und farbig, groß, rechts oben Ihre Übungsgruppennummer.

Aufgabe 32

Ein Maß auf $\mathcal{L}_N$ heißt translationsinvariant, wenn

$$\mu(A+y) = \mu(A) \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^N \text{ und alle } A \in \mathcal{L}_N \text{ gilt.}$$

Zeige: $\mu = \lambda_N$ ist das einzige translationsvariante Maß auf $\mathcal{L}_N$ (und damit auch auf $\mathcal{B}_N$) mit $\mu([0,1]^N) = 1$.

Hinweis: Man zeige zunächst: $\mu([0,\frac{1}{n}]^N) = \frac{1}{n^N}\mu([0,1]^N)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für jedes translationsvariante Maß μ auf $\mathcal{L}_N$. Man verwende, dass das Lebesgue-Maß die eindeutige Fortsetzung des Jordan-Maßes ist.

Aufgabe 33

Das Verfahren zur Erzeugung der Mitteldrittel-Cantor-Menge wird modifiziert, indem man von den 2^n im n-ten Schritt vorhandenen Intervallen nicht das mittlere Drittel der Länge 3^{-n-1} entfernt, sondern das zentrale mittlere Intervall der Länge $r^n 3^{-n-1}$, wobei r eine reelle Zahl mit $0 \leq r \leq 1$ ist.

Berechnen Sie das Lebesgue-Maß der auf diese Weise konstruierten Cantor-Menge und zeigen Sie, dass dieses Maß bei geeigneter Wahl von r jeden Wert zwischen 0 und 2/3 annehmen kann.

Aufgabe 34

a) Zu jeder Menge $A \in \mathcal{L}_N$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Obermenge $U \subseteq A$ mit $\lambda_N(U \backslash A) < \varepsilon$ und eine abgeschlossene Teilmenge $F \subseteq A$ mit $\lambda_N(A \backslash F) < \varepsilon$.

b) Es gilt auch die Umkehrung von Aufgabe a): Wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge U und eine abgeschlossene Menge F mit $F \subseteq A \subseteq U$ existieren mit $\lambda_N(U \backslash F) < \varepsilon$, dann ist $A \in \mathcal{L}_N$.

c) Für jedes $A \in \mathcal{L}_N$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda_N(A) &= \inf\{\lambda_N(U) : A \subseteq U, U \text{ offen } \} \\ &= \sup\{\lambda_N(C) : C \subseteq A,\ C \text{ abgeschlossen } \} \\ &= \sup\{\lambda_N(K) : K \subseteq A,\ K \text{ kompakt } \}. \end{aligned}$$

d) Die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}_N$ zusammen mit den Lebesgue-Nullmengen erzeugt die Lebesgue-σ-Algebra, also

$$\sigma(\mathcal{B}_N \cup \{A \subseteq \mathbb{R}^N \,|\, \lambda_N^*(A) = 0\}) = \mathcal{L}_N$$

Aufgabe 35

Jede beschränkte konvexe Teilmenge A des $\mathbb{R}^N$ ist Jordan-meßbar. Hinweis: O.E. sei $0 \in A^o$. Betrachte $A_k = (1 - \frac{1}{k})\overline{A}$.