Prof. Dr. B. Aulbach
Dr. C. Gugg
Institut für Mathematik
Universität Augsburg

23. Januar 2003

Analysis III

13. Übungsblatt

Abgabetermin für die Übungsaufgaben ist Freitag, der 31.01.2003, 10:00 Uhr. Werfen Sie Ihre Lösungen (ordentlich zusammengeheftet) in die dafür vorgesehenen Briefkästen in der Eingangshalle des Instituts für Mathematik. Schreiben Sie bitte auf die Aufgabenblätter Ihren Namen und farbig, groß, rechts oben Ihre Übungsgruppennummer.

Aufgabe 48
Man bestimme eine stetige Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die fast überall differenzierbar ist mit Ableitung f', aber:

$$f(x) \neq \int_0^x f'(\xi)d\xi \quad \text{für fast alle } x \in [0,1].$$

Hinweis: Definiere

$$f_0(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x & : \ x \in [0, \frac{1}{3}) \\ \frac{1}{2} & : \ x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ \frac{3}{2}(x - \frac{2}{3}) + \frac{1}{2} & : \ x \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Dieses Verfahren wird induktiv wie in der Konstruktion der Cantormenge fortgesetzt. Man zeige, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert, die die geforderten Eigenschaften hat. ($f'(x) = 0$ für fast alle $x \in [0,1]$).

Aufgabe 49
$f(x,y) := \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ für $0 < x < 1, 0 < y < 1$ und $f(x,y) := 0$ sonst. Man zeige, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar ist, und berechne

$$\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)d\lambda(x)d\lambda(y) \quad \text{und} \quad \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} f(x,y)d\lambda(y)d\lambda(x).$$

Aufgabe 50

Sei (Ω, F, μ) ein Maßraum und eine Folge messbarer Funktionen $f_n : \Omega \to [0, \infty], n \in \mathbb{N}_0$. Für ein $p > 0$ gelte $\int\limits_\Omega |f_n|^p d\mu < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sowie $f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f_0$ μ-fast sicher. Zeigen Sie: Für die Funktionen $g_n := 2^p(|f_n|^p + |f_0|^p) - |f_n - f_0|^p$, $n \in \mathbb{N}$, gilt: g_n ist nichtnegativ, μ-integrierbar und es gilt $\lim_{n\to\infty} g_n = 2^{p+1}|f_0|^p$ μ-fast sicher.

Sei weiter $\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega |f_n|^p d\mu = \int\limits_\Omega |f_0|^p d\mu$. Folgern Sie daraus $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\Omega |f_n - f_0|^p d\mu = 0$.

Aufgabe 51

Es sei $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ Lebesgue-messbar und $\Omega_k \in \mathcal{L}_N$ mit $\mathbb{R}^N = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} \Omega_k$ und $\int\limits_{\Omega_k} |f| d\lambda < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Man beweise:

(a) $\limsup\limits_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_k} |f| d\lambda = \infty \Rightarrow f$ nicht Lebesgue-integrierbar.

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_k} |f| d\lambda < \infty \Rightarrow f$ Lebesgue-integrierbar.